Universidad Nacional de San Juan

Facultad de Ingeniería

MATEMÁTICA APLICADA

Ingeniería Mecánica
Ingeniería Electromecánica

Equipo de Cátedra

Profesor Titular	Dr. Javier Gimenez
Jefe de Trabajos Prácticos	Bioing. Emanuel Tello

AÑO 2023

ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES

INTRODUCCION

Definición: Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (a veces abreviada como EDDP) son aquellas ecuaciones diferenciales cuyas incógnitas son funciones de diversas variables independientes, con la peculiaridad de que en dicha ecuación figuran no solo las propias funciones sino también sus derivadas.

- Orden: Mayor orden de derivación que aparece en la ecuación.
- EDDP Lineales: son aquellas que son de primer grado en la variable dependiente y en sus derivadas parciales.

El siguiente cuadro resume estas definiciones.

Ecuaciones Diferenciales	Tipo	variable dependiente	variables indep.	Orden	Lineal
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$	parcial	u	x, y	2	si
$y^{(n)}+y^2=0$	ordinaria	y	x	n	no
$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$	parcial	u	x, t	2	si
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=0$	parcial	u	x, y	2	no
$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0$	parcial	u	x, y	4	si

Solución de una EDDP

Comencemos viendo cómo generar algunas EDDP particulares.

Ejemplo 1:

Supongamos que tenemos una función $z = z(x, y)$ donde la dependencia de z respecto a las variables independientes es de la forma

$$z = \phi(x + y)$$

donde ϕ es una función arbitraria de una sola variable. Por ejemplo

Función de la forma $z = \phi(x + y)$	Función ϕ considerada
$z = (x + y)^2$	$\phi(t) = t^2$
$z = x + y + \cos(x + y) + e^{-(x+y)^2}$	$\phi(t) = t + \cos t + e^{-t^2}$
$z = (x + y)^3 - x - y$	$\phi(t) = t^3 - t$

En estos casos la función ϕ depende de la variable t, que depende de las variables x e y a través de la relación $t = x + y$. Esto es: $\phi \rightarrow t \begin{array}{l}\nearrow x \\ \searrow y\end{array}$

Luego la derivada de ϕ respecto de t es una derivada total. Además, podemos aplicar la regla de la cadena para derivar ϕ respecto de x e y:

$$z_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{d\phi}{dt}\frac{\partial t}{\partial x} = \phi'(t).1 = \phi'(t) = \phi'(x + y)$$

Análogamente

$$z_y = \phi'(x + y)$$

Por lo tanto

$$z_x = z_y$$

Concluyendo que cualquier función de la forma

$$z = \phi(x + y)$$

es solución de la EDDP $z_x = z_y$, o equivalentemente, de la EDDP

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

<u>Ejercicio:</u> Verificar que las funciones dadas en la tabla verifican la EDDP.

Ejemplo 2:

Supongamos que tenemos una función $z = z(x, y)$ donde la dependencia de z respecto a las variables independientes es de la forma

$$z = \phi(x) + \psi(y)$$

donde ϕ y ψ son funciones arbitrarias de una sola variable. Por ejemplo

Función de la forma $z = \phi(x) + \psi(y)$	Función ϕ considerada	Función ψ considerada
$z = x^2 + y^2$	$u = \phi(x) = x^2$	$v = \psi(y) = y^2$
$z = x + y + \cos(x) + e^{-y^2}$	$u = \phi(x) = x + \cos(x)$	$v = \psi(y) = y + e^{-y^2}$
$z = x^3 - x - y$	$u = \phi(x) = x^3 - x$	$v = \psi(y) = -y$

En estos casos las funciones ϕ y ψ depende de una variable. Esto es:

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[r] & x \\ z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & v \arrow[r] & y \end{tikzcd}$$

Luego las derivadas de ϕ y ψ respecto a sus variables independientes son derivadas totales. Además, podemos aplicar la regla de la cadena para derivar

$$z = u + v = \phi(x) + \psi(y)$$

respecto de x e y:

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} = 1.\phi'(x) = \phi'(x)$$

Análogamente

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dy} = 1.\psi'(y) = \psi'(y)$$

Luego las derivadas cruzadas de z son nulas, ya que z_x no depende de y, y z_y no depende de x. Por lo tanto

$$z_{xy} = z_{yx} = 0$$

Concluyendo que cualquier función de la forma $z = \phi(x) + \psi(y)$ es solución de la EDDP $z_{xy} = 0$, o equivalentemente, de la EDDP

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

Ejercicio: Verificar que las funciones dadas en la tabla verifican la EDDP.

Ejemplo 3:

Supongamos que tenemos una función $z = z(x, t)$ donde la dependencia de z respecto a las variables independientes es de la forma

$$z = \phi(x + at) + \psi(x - at)$$

donde a es una constante, ϕ es una función arbitraria de una sola variable $u = x + at$, y ψ es una función arbitraria de una sola variable $v = x - at$. Esto es

$$\begin{tikzcd} & & x \\ & u \arrow[ur] \arrow[r] & t \\ z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & v \arrow[r] \arrow[dr] & x \\ & & t \end{tikzcd}$$

Por ejemplo

Función de la forma $z = \phi(x + at) + \psi(x - at)$	Función ϕ considerada	Función ψ considerada
$z = (x + at)^2 + (x - at)^2$	$\phi(u) = u^2$	$\psi(v) = v^2$
$z = x + at + \cos(x - at)$	$\phi(u) = u$	$\psi(v) = \cos v$
$z = (x - at)^3 - e^{x+at}$	$\phi(u) = -e^u$	$\psi(v) = v^3$

Luego las derivadas de ϕ y ψ respecto a sus variables independientes son derivadas totales. Además, podemos derivar z respecto de x y t:

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$z_x = \phi'(u) + \psi'(v) = \phi'(x + at) + \psi'(x - at)$$

Análogamente

$$z_t = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$z_t = \phi'(u).a - \psi'(v).a = a\,\phi'(x + at) - a\,\psi'(x - at)$$

Derivando nuevamente respecto de x y t respectivamente, resultan:

$$z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z_x}{\partial x} = \phi''(x + at) + \psi''(x - at)$$

$$z_{tt} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial z_t}{\partial t} = a^2\phi''(x + at) + a^2\psi''(x - at)$$

Por lo tanto

$$z_{tt} = a^2 z_{xx}$$

Concluyendo que cualquier función de la forma

$$z = \phi(x + at) + \psi(x - at)$$

es solución de la EDDP $z_{tt} = a^2 z_{xx}$, o equivalentemente, de la EDP

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

<u>Ejercicio:</u> Verificar que las funciones dadas en la tabla verifican la EDDP.

<u>Ejercicios</u>:

Generar la EDDP que tienen como solución las siguientes funciones:

1) $z = x\phi(y) + \psi(y)$ Rta: $z_{xx} = 0$

2) $z = x\phi\left(\frac{y}{x}\right)$ Rta: $z = x.z_x + y.z_y$

3) $z = \phi(x^2 + y^2)$ Rta: $yz_x - xz_y = 0$

Con fines ilustrativos, en cada uno de los ejemplos hemos partido de formas funcionales específicas y hemos hallado una EDDP para la cual estas funciones son soluciones. En la práctica el procedimiento es al revés, se da una EDDP y se intenta hallar un conjunto de funciones que satisfacen la EDDP.

En el Ejemplo 1 se consideró que z depende de una sola función arbitraria ϕ, y se halló una EDDP de orden 1.

Por otro lado, en los Ejemplos 2 y 3 se consideró que z depende de dos funciones arbitrarias ϕ y ψ, y se halló una EDDP de orden 2.

Este mismo patrón se verificó en el anterior Ejercicio 3.

En general, las soluciones de una EDDP de orden n que dependen de n funciones arbitrarias se las conoce como ***solución general*** de la EDDP.

Particularizando valores para las funciones arbitrarias en la solución general obtenemos las ***soluciones particulares***. Las funciones dadas en las tablas de cada uno de los ejemplos son soluciones particulares de las respectivas EDDP.

ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

Un caso particular de las EDDP son las EDDP lineales de segundo orden, las cuales aparecen frecuentemente en la práctica al modelar problemas físicos. Su forma general es:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

donde A, B, C, D, E, F, G son funciones de x e y.

Una clasificación importante de estas EDDP surge del análisis del signo de $B^2 - 4AC$

Si $B^2 - 4AC < 0$	Ecuación de tipo Elíptica
Si $B^2 - 4AC = 0$	Ecuación tipo Parabólica
Si $B^2 - 4AC > 0$	Ecuación tipo Hiperbólica

Ecuaciones del tipo Hiperbólicas

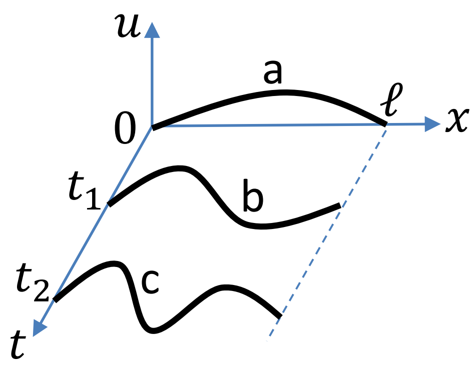
Aparecen frecuentemente en los problemas físicos relacionados con procesos oscilatorios. La ecuación más simple es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Es la llamada "**ecuación de la cuerda vibrante**" o ecuación de las oscilaciones transversales de una cuerda.

Deducción

Imaginemos una cuerda tensa de guitarra de longitud ℓ amarrada en sus extremos. Cada punto de la cuerda se caracteriza por su abscisa x. La elongación o desplazamiento u es función de la posición x y del tiempo t, o sea $u = u(x,t)$



El proceso de oscilación se describe dando la forma que adopta la cuerda en distintos tiempos $t = 0,\ t = t_1, t = t_2, \ldots$ que representan fotografías “a”, “b”, “c”, … de la cuerda. Por ejemplo $u(x, t_1)$ representa la foto “b”.

En particular para $t = 0$ la foto “a” nos da la forma inicial de la cuerda, es decir

$$u(x,0) = f(x)$$

Otro dato que tenemos es la velocidad inicial en $t = 0$, o sea,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_t(x,0) = g(x)$$

Para determinar la solución única de una ecuación diferencial se necesitas las condiciones complementarias, las cuales están formadas por las condiciones iniciales y las de contorno. En este caso, las condiciones iniciales son la forma y la velocidad inicial de la cuerda

$$u(x,0) = f(x)$$

$$u_t(x,0) = g(x)$$

Mientras que las condiciones de contorno provienen del hecho que la cuerda está amarrada en los extremos, lo cual implica que el desplazamiento de la cuerda en los extremos es nula, esto es

$$u(0,t) = 0 \qquad \text{y} \qquad u(\ell,t) = 0 \qquad \text{para todo } t$$

Pasaremos ahora del modelo real al modelo físico, introduciendo las siguientes hipótesis simplificativas:

(H_1) Los desplazamientos son pequeños.

(H_2) Los desplazamientos u son verticales, es decir, perpendiculares al plano (x,t)

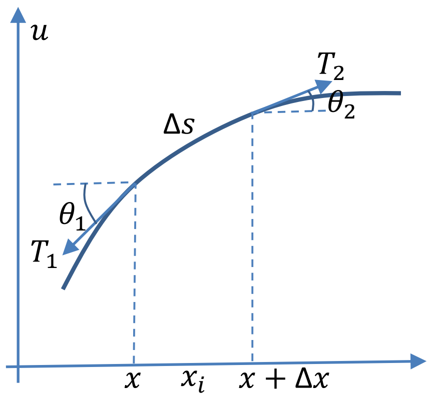
(H_3) La cuerda es un hilo elástico y flexible.

La expresión matemática de estas hipótesis y la relación entre las variables u, x y t nos llevará del modelo físico al modelo matemático.

En la Figura Δs representa un elemento de arco de cuerda, cuya masa puede ser expresada como

$$m = \rho \Delta s$$

siendo ρ la densidad lineal (masa por unidad de longitud)



Debido a (H3) las tensiones T_1 y T_2 son tangentes a la curva y conforman con el eje horizontal los ángulos θ_1 y θ_2 diagramados en la Figura.

Debido a (H2) no existe aceleración en la dirección del eje x. Luego, las tensiones horizontales deben ser iguales

$$T_1 \cos\theta_1 = T_2 \cos\theta_2$$

De (H1) los desplazamientos son pequeños, y por ende,

$$\theta_1 \cong \theta_2 \cong 0 \Rightarrow T_1 \cong T_2 \cong T$$

siendo T la tensión horizontal constante.

Aplicando la segunda Ley de Newton, y teniendo en cuenta que por (H2) sólo hay desplazamientos verticales (según el eje u), resulta

$$ma = F$$

$$\rho \Delta s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Tsen\theta_2 - Tsen\theta_1$$

Dividiendo por T y teniendo en cuenta que $\cos\theta_1 \cong \cos\theta_2 \cong 1$, resulta

$$\frac{\rho \Delta s}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T\mathrm{sen}\theta_2}{T\cos\theta_2} - \frac{T\mathrm{sen}\theta_1}{T\cos\theta_1}$$

$$\frac{\rho \Delta s}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathrm{tg}\,\theta_2 - \mathrm{tg}\,\theta_1$$

$$\frac{\rho \Delta s}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$$

Debido a (H1) las oscilaciones son pequeñas y se verifica que $\Delta s \cong \Delta x$. Luego

$$\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)}{\Delta x}$$

Tomando el límite cuando $\Delta x \to 0$ resulta

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

siendo $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ una constante denominada velocidad de propagación.

En resumen, el modelo matemático de la cuerda vibrante es

EDDP: $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Condiciones de contorno: $u(0,t) = 0$ para todo t

$u(\ell,t) = 0$ para todo t

Condiciones iniciales: $u(x,0) = f(x)$ para todo x

$u_t(x,0) = g(x)$ para todo x

Se puede demostrar (Teorema de unicidad) que las condiciones complementarias dadas (iniciales y de contorno) son suficientes para obtener una *solución única*. También son necesarias, es decir, no sobran para resolver el problema (Teorema de la existencia).

Generalización a 2-3 dimensiones

La ecuación vista llamada ecuación unidimensional de ondas (la dimensión se refiere a las variables espaciales x, y, z) se puede generalizar así:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u$$

siendo Δu el Laplaciano de u dado por

$$\Delta u = \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{caso unidimensional} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \text{caso bidimensional} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} & \text{caso tridimensional} \end{cases}$$

los cuales corresponden a los modelos de la cuerda vibrante, membrana vibrante y sólido vibrante respectivamente.

SOLUCION DE LA ECUACIÓN DE LA CUERDA VIBRANTE

MÉTODO DE D'ALEMBERT

Según lo visto en el Ejemplo 3, la EDDP del modelo matemático de la cuerda vibrante tiene por solución general a

$$u(x,t) = \phi(x+at) + \psi(x-at)$$

siendo ϕ y ψ funciones arbitrarias. Determinamos ϕ y ψ para hallar la solución particular de este problema.

Usando las condiciones iniciales.

$$f(x) = u(x,0) = \phi(x) + \psi(x)$$
$$g(x) = u_t(x,0) = a\phi'(x) - a\psi'(x)$$

Derivando la primera ecuación y multiplicado por a obtenemos el sistema:

$$a\phi'(x) + a\psi'(x) = af'(x)$$
$$a\phi'(x) - a\psi'(x) = g(x)$$

Sumando y restando miembro a miembro ambas ecuaciones respectivamente resultan que

$$2a\phi'(x) = af'(x) + g(x)$$
$$2a\psi'(x) = af'(x) - g(x)$$

Dividiendo por $2a$ en ambas ecuaciones resulta el sistema

$$\begin{cases} \phi'(x) = \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2a}g(x) \\ \psi'(x) = \frac{1}{2}f'(x) - \frac{1}{2a}g(x) \end{cases}$$

Fijado arbitrariamente un valor x_0, e integrando la primera ecuación entre x_0 y $x+at$, y la segunda entre x_0 y $x-at$, resultan

$$\int_{x_o}^{x+at} \phi'(\tau)d\tau = \frac{1}{2}\int_{x_o}^{x+at} f'(\tau)d\tau + \frac{1}{2a}\int_{x_o}^{x+at} g(\tau)d\tau$$

$$\int_{x_o}^{x-at} \psi'(\tau)d\tau = \frac{1}{2}\int_{x_o}^{x-at} f'(\tau)d\tau - \frac{1}{2a}\int_{x_o}^{x-at} g(\tau)d\tau$$

Aplicando regla de Barrow e invirtiendo los límites de la última integral

$$\phi(x+at)-\phi(x_0)=\frac{1}{2}\big(f(x+at)-f(x_0)\big)+\frac{1}{2a}\int_{x_o}^{x+at}g(\tau)d\tau$$

$$\psi(x-at)-\psi(x_0)=\frac{1}{2}\big(f(x-at)-f(x_0)\big)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x_o}g(\tau)d\tau$$

Juntando todas las constantes

$$\phi(x+at)=\frac{1}{2}f(x+at)+\frac{1}{2a}\int_{x_o}^{x+at}g(\tau)d\tau+C_1$$

$$\psi(x-at)=\frac{1}{2}f(x-at)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x_o}g(\tau)d\tau+C_2$$

Sumando ambas ecuaciones y haciendo $C=C_1+C_2$, resulta

$$u(x,t)=\phi(x+at)+\psi(x-at)$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+at)+f(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(\tau)d\tau+C$$

Determinemos C usando la condición inicial $u(x,0)=f(x)$

$$f(x)=u(x,0)=\phi(x)+\psi(x)$$

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(x)]+C=f(x)+C\quad\Rightarrow\quad C=0$$

Finalmente:

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+at)+f(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(\tau)d\tau}$$

Las funciones f y g son funciones de una variable definidas sobre $[0,\ell]$. Sin embargo, el argumento $x\pm at$ puede tomar valores fuera de $[0,\ell]$. Esto implica la necesidad de extender f y g a todo el eje real de una manera conveniente. Analicemos como extenderlas sin generar conflictos con las hipótesis del problema.

Usando una de las condiciones de contorno:

$$0=u(0,t)=\frac{1}{2}[f(at)+f(-at)]+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}g(\tau)d\tau$$

Haciendo el cambio de variable $v=at$, resulta

$$0 = \underbrace{\frac{1}{2}[f(v) + f(-v)]}_{I} + \underbrace{\frac{1}{2a}\int_{-v}^{v} g(\tau)d\tau}_{II}$$

Esto vale para cualquiera sea la f y g que se consideren en las condiciones iniciales, pero ambas funciones se eligen independientemente, por lo que no queda otra que $I = II = 0$. Luego

$$\begin{cases} f(v) + f(-v) = 0 \\ \displaystyle\int_{-v}^{v} g(\tau)\, d\tau = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(v) = -f(-v) \\ g(v) = -g(-v) \end{cases}$$

Luego, f y g deben extenderse de forma impar

Análogamente para $x = \ell$, esto es, partiendo de la condición de contorno $u(\ell, t) = 0$, se obtiene que

$$f(\ell + v) = -f(\ell - v)$$
$$g(\ell + v) = -g(\ell - v)$$

Estas ecuaciones implican que las extensiones de f y g, aparte de ser impares, deben ser impares respecto al eje $x = \ell$. Usando estas dos condiciones:

$$f(v) = -f(-v) = -f(\ell - (\ell + v)) = f(\ell + (\ell + v)) = f(2\ell + v)$$

Análogamente

$$g(v) = g(2\ell + v)$$

En conclusión, se deben considerar extensiones impares y periódicas de periodo 2ℓ de las funciones f y g.

<u>Ejemplo 4:</u> Aplicaremos la fórmula de D'Alembert, para el caso $f(x) = x(\ell - x)$, $g(x) = 0$, considerando $a = \ell = 1$, para $x = 0.5,\ t = 8$; y para $x = 0.4,\ t = 10.6$.

Solución:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + t) + f(x - t)]$$

Al ser f extendida de forma periódica con periodo $T = 2\ell = 2$, resulta que

$$f(0.5+8)=f(8.5)=f(4\times 2+0.5)=f(0.5)$$
$$f(0.5-8)=f(-7.5)=f((-4)\times 2+0.5)=f(0.5)$$

$$f(0.4+10.6)=f(11)=f(5\times 2+1)=f(1)=1(1-1)=0$$
$$f(0.4-10.6)=f(-10.2)=f\big((-5)\times 2-0.2\big)=f(-0.2)$$

Pero además, f se extiende de forma impar, por lo que $f(-0.2)=-f(0.2)$.

En resumen:

$$u(0.5,8)=\frac{1}{2}[f(8.5)+f(-7.5)]=\frac{1}{2}[f(0.5)+f(0.5)]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right]=0.25$$
$$u(0.4,10.6)=\frac{1}{2}[f(11)+f(-10.2)]=\frac{1}{2}[f(1)-f(0.2)]=\frac{1}{2}[0-0.16]=-0.08$$

MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

Es quizás el método analítico más difundido para la resolución de EDDP. Lo desarrollaremos para resolver la ecuación de la cuerda vibrante, pero su aplicación es más amplia.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$
$$u(0,t)=0 \quad \text{para todo } t \qquad (2)$$
$$u(\ell,t)=0 \quad \text{para todo } t \qquad (3)$$
$$u(x,0)=f(x) \quad \text{para todo } x \qquad (4)$$
$$u_t(x,0)=g(x) \quad \text{para todo } x \qquad (5)$$

A la resolución la dividimos en varios pasos.

Paso a): Asumamos que la solución puede expresarse como el producto de dos funciones siguiente modo

$$u(x,t)=X(x)T(t) \qquad (6)$$

donde $X(x)$ es una función solo de x, y $T(t)$ es una función solo de t. Si bien parece un supuesto bastante fuerte, veremos que nos conduce a hallar la solución general del problema.

Por simplicidad en lo que sigue escribiremos solamente X y T en lugar de $X(x)$ y $T(t)$. Las derivadas sucesivas de X respecto a x son derivadas totales que denotaremos X', X'',… Lo mismo sucede con T cuando lo derivamos respecto de t.

Veamos cómo queda (1) si trabajamos bajo el supuesto (6):

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= X''T \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= XT''\end{aligned}\right\} \Longrightarrow XT'' = a^2 X''T$$

Paso b): Separamos variables, es decir, en el primer miembro dejamos solo lo que es función de X, y en el segundo lo que solo es función de T.

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T}$$

Puesto que es una igualdad entre un miembro que depende exclusivamente de x, y otro miembro que depende exclusivamente de t, esto solo es posible si resulta que:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = \text{cte} \qquad (7)$$

Paso c): Usando las condiciones de contorno (2) y (3)

$$0 = u(0,t) = X(0)T(t) \quad \Longrightarrow \quad X(0) = 0$$

$$0 = u(\ell,t) = X(\ell)T(t) \quad \Longrightarrow \quad X(\ell) = 0$$

Estas implicaciones valen porque $T(t)$ no puede ser siempre 0, pues de ser así, por (6), resultaría una solución trivial $u(x,t) = 0$ que no cumpliría (4) y (5) en general.

Con estas condiciones y (7) se puede armar el siguiente problema denominado de "Sturm-Liouville" que consiste en resolver una ecuación diferencial ordinaria (EDO) lineal de segundo orden con las siguientes condiciones de contorno

$$\begin{cases} X'' - \text{cte}.X = 0 \\ X(0) = X(\ell) = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

Resolver (8) nos permitirá hallar $X(x)$, el cual es el primer factor de u según (6).

Paso d): El polinomio característico de la EDO de (8) es $r^2 - \text{cte} = 0$, cuyas raíces son $r_{1,2} = \pm\sqrt{\text{cte}}$. Ahora, la naturaleza de las soluciones va a depender del signo de la cte, por lo que analizaremos tres posibles casos.

- ✓ Caso 1: Si $\text{cte} = \lambda^2 > 0$ entonces X resultaría ser una combinación lineal de exponenciales de la forma

$$X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$$

Usando las condiciones de contorno de (8), y como la función exponencial nunca se anula, resulta

$$\left.\begin{array}{r} 0 = X(0) = C_1 e^{\lambda 0} + C_2 e^{-\lambda 0} = C_1 + C_2 \\ 0 = X(\ell) = C_1 e^{\lambda \ell} + C_2 e^{-\lambda \ell} \end{array}\right\} \implies C_1 = C_2 = 0$$

En consecuencia $X(x) = 0$ y nuevamente caeríamos en la solución trivial, por lo que este caso debemos desecharlo.

✓ Caso 2: Si cte $= 0$ entonces la EDO de (8) se reduciría a $X'' = 0$, y por ende,

$$X(x) = C_1 x + C_2$$

Usando las condiciones de contorno de (8) resulta

$$\left.\begin{array}{r} 0 = X(0) = C_1 0 + C_2 = C_2 \\ 0 = X(\ell) = C_1 \ell + C_2 \end{array}\right\} \implies C_1 = C_2 = 0$$

Nuevamente obtendríamos $X(x) = 0$ y por ende debemos desechar este caso también.

✓ Caso 3: Si cte $= -\lambda^2 < 0$ entonces X resultaría ser

$$X(x) = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \operatorname{sen}(\lambda x)$$

Usando las condiciones de contorno de (8) resulta

$$\left.\begin{array}{l} 0 = X(0) = C_1 \cos(\lambda 0) + C_2 \operatorname{sen}(\lambda 0) = C_1 \\ 0 = X(\ell) = C_1 \cos(\lambda \ell) + C_2 \operatorname{sen}(\lambda \ell) \end{array}\right\} \implies C_2 \operatorname{sen}(\lambda \ell) = 0$$

Si tomamos $C_2 = 0$ obtenemos la solución trivial, entonces $C_2 \neq 0$, y por ende,

$$\operatorname{sen}(\lambda \ell) = 0 \quad \implies \quad \lambda \ell = n\pi$$

donde n es un entero cualquiera. Luego hay un posible λ para cada n, y tiene la forma

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{\ell}$$

Cada n genera un λ_n, y cada λ_n genera una posible solución a (8) dada por

$$X_n(x) = C_{2,n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \qquad (9)$$

Note que los enteros negativos $-n$ generan las mismas soluciones (9) que los enteros positivos (naturales) n. Además, $n = 0$ conduce a la solución trivial, por lo que sólo consideraremos las soluciones de (8) dadas en (9) con n un número natural.

En la práctica no es necesario desarrollar los tres casos, sin embargo, se debe tener en claro cuál es el caso conveniente y desarrollarlo.

En resumen, solo para los λ iguales $\lambda_n = \frac{n\pi}{\ell}$ existen soluciones no triviales (9) del problema de Sturm-Liouville planteando en (8).

Paso e): Hallemos $T(t)$. De (7) resulta que $T(t)$ debe ser solución de la siguiente EDO lineal de segundo orden:

$$T'' + \lambda^2 a^2 T = 0 \qquad (10)$$

Sin embargo, como para cada n hay un posible λ_n, en realidad debemos hallar para cada n la solución $T_n(t)$ de la EDO lineal de segundo orden:

$$T_n'' + \lambda_n^2 a^2 T_n = 0 \qquad (11)$$

El polinomio característico de (11) es

$$r^2 + \lambda_n^2 a^2 = 0$$

el cual tiene como raíces

$$r_{1,2} = \pm \lambda_n a j = \pm \frac{n\pi a}{\ell} j$$

donde j es la unidad imaginaria. Luego

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi a}{\ell} t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{\ell} t\right) \qquad (12)$$

Paso f): Resumiendo, hemos hallado para cada n una solución $X_n(x)$ del problema (8), y una solución $T_n(t)$ de (11). Luego, para cada n existe una función

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi a}{\ell} t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{\ell} t\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \qquad (13)$$

que es solución de EDDP la ecuación diferencial (1) y satisface las condiciones de contorno (2) y (3).

Note que las constantes $C_{2,n}$ de (9) se juntaron con las constantes A_n y B_n de (12), para generar nuevas constantes A_n y B_n en (13) que denominaremos igual para simplificar la notación.

Debido a la linealidad del sistema:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi a}{\ell} t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{\ell} t\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \qquad (14)$$

también satisface (1), (2) y (3) para cualquier valor de las constantes A_n y B_n.

Note que las funciones $u_n(x,t)$ por si solas no pueden verificar en general las condiciones iniciales (4) y (5), ya que por ejemplo, si $f(x)$ fuese un polinomio o cualquier función no trigonométrica, entonces $u_n(x,0) = A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \neq f(x)$.

Por este motivo trabajaremos directamente con la solución (14), y hallaremos un procedimiento que nos permita calcular las constantes A_n y B_n indicadas para satisfacer (4) y (5) también.

Reemplazando (14) en (4), resulta

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \qquad (15)$$

Con el fin de usar (5), derivemos (14) respecto de t:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{\ell}\left(-A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{\ell} t\right) + B_n \cos\left(\frac{n\pi a}{\ell} t\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$$

Luego, de (5)

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{\ell} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \qquad (16)$$

Ahora utilizaremos los desarrollos en series de Fourier de $f(x)$ y $g(x)$ para hallar las constantes A_n y B_n indicadas para que la función $u(x,t)$ dada en (14) satisfaga (4) y (5). Recuerde que esta función ya verifica (1), (2), y (3).

De la teoría de “Series de Fourier”, cualquier función continua por partes y con derivada continua por partes, se puede desarrollar en series de Fourier.

Note que la expresión (15) es una serie de senos, por lo que representa el desarrollo en serie de Fourier de la extensión periódica impar de $f(x)$, donde la frecuencia angular es $\omega_0 = \frac{\pi}{\ell}$, y por lo tanto, su periodo es $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\ell$. Luego, utilizando la fórmula para hallar los coeficientes de Fourier de una función impar, resulta que

$$A_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(n\omega_0 x)\,dx \quad \Longrightarrow \quad A_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx \quad (17)$$

Análogamente para (16)

$$\frac{n\pi a}{\ell}B_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} g(x)\sin(n\omega_0 x)\,dx \Longrightarrow$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell} g(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx \qquad (18)$$

En resumen:

La solución del problema de la cuerda vibrante modelado matemáticamente a través de (1)-(5) viene dada por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{n\pi a}{\ell}t\right) + B_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi a}{\ell}t\right)\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

$$A_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell} g(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx$$

Ejemplo 5: Aplicar el método de Separación de Variables, para resolver el problema de la Cuerda Vibrante considerando:

- $f(x) = x(\ell - x)$, $g(x) = 0$, $a = \ell = 1$
- para $x = 0.5$, $t = 8$; y para $x = 0.5$, $t = 11$. Comparar con los resultados obtenidos con el método de D'Alembert

Solución

Para este caso la EDDP a resolver es:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(x,0) = x(1-x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases}$$

El método de separación de variables propone como solución

$$u(x,t) = X(x).T(t)$$

Derivando a ambos miembros respecto a x dos veces, y considerando que $X(x)$ es función de x solamente y $T(t)$ es función solamente de t se tiene por la ecuación (7)

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = \text{cte}$$

Ya se hizo el análisis anteriormente y el único valor de la constante para que diera una solución distinta de la trivial es cte $= -\lambda^2$, obteniendo entonces

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda^2 \qquad (A)$$

Luego analizando las condiciones de contorno:

$$u(0,t) = X(0).T(t) = 0 \quad \forall t \qquad \Longrightarrow \qquad X(0) = 0$$

$$u(1,t) = X(1).T(t) = 0 \quad \forall t \qquad \Longrightarrow \qquad X(1) = 0$$

Y considerando solamente lo que respecta a $X(x)$ de (A) se tiene

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2\, X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(1) = 0 \end{cases}$$

Ecuación diferencial Ordinaria Lineal de segundo orden cuya solución es, teniendo en cuenta las raíces de la Ecuación Característica:

$$X = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \operatorname{sen}(\lambda x)$$

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno se obtiene:

$$\begin{cases} X(0) = C_1 = 0 \\ X(1) = C_2 \operatorname{sen}(\lambda) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen}(\lambda) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = n\pi \end{cases}$$

Para cada valor de n la solución es

$$\underline{X_n = C_n \operatorname{sen}(n\pi x)}$$

Consideremos la Ecuación Diferencial Ordinaria respecto a t, como $a = 1$ queda

$$T'' + \lambda^2\, T = 0$$

Cuya solución teniendo en cuenta las raíces de la Ecuación Característica es

$$T(t) = A \cos(\lambda t) + B \operatorname{sen}(\lambda t)$$

Pero como $\lambda = n\pi$ para cada valor de n es

$$T_n(t) = A_n \cos(n\pi t) + B_n \operatorname{sen}(n\pi t)$$

Luego solución general es:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(A_n \cos(n\pi t) + B_n \operatorname{sen}(n\pi t)\big) \operatorname{sen}(n\pi x) \qquad (I)$$

Nota : Hemos renombrados constantes para reducir notación: $C_n A_n \to A_n$ y $C_n B_n \to B_n$

Para calcular las constantes A_n y B_n se aplican las condiciones iniciales

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \underbrace{\cos(n\pi 0)}_{1} + B_n \underbrace{\operatorname{sen}(n\pi 0)}_{0} \right) \operatorname{sen}(n\pi x)$$

$$x(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{A_n}_{b_n} \operatorname{sen}(n\pi x) \qquad\qquad (II)$$

Esto corresponde al desarrollo en serie de Fourier de la extensión impar de la función $f(x) = x(1-x)$. Además sabemos que el periodo $T = 2\ell = 2$ y la frecuencia angular es $\omega_0 = {}^{2\pi}/_{T} = \pi$. Lo cual coincide con la expresión (II), siendo

$$\operatorname{sen}(n\omega_0 x) = \operatorname{sen}(n\pi x)$$

Como es el coeficiente que multiplica las funciones seno en el desarrollo de Fourier corresponde a los b_n. Luego

$$A_n = b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} x(\ell - x)\operatorname{sen}(n\pi x)dx = 2\int_0^1 x(1-x)\operatorname{sen}(n\pi x)dx$$

$$= 2\int_0^1 x\sin(n\pi x)\,dx - 2\int_0^1 x^2 \sin(n\pi x)\,dx$$

$$= 2\left(\frac{\sin(n\pi x) - n\pi x\cos(n\pi x)}{n^2\pi^2}\right)_0^1 - 2\left(\frac{2n\pi x\sin(n\pi x) + (2 - n^2\pi^2 x^2)\cos(n\pi x)}{n^3\pi^3}\right)_0^1$$

$$= 2\left(\frac{-n\pi\cos(n\pi)}{n^2\pi^2} - 0\right) - 2\left(\frac{(2 - n^2\pi^2)\cos(n\pi)}{n^3\pi^3} - \frac{2}{n^3\pi^3}\right)$$

$$= \frac{-2n\pi(-1)^n}{n^2\pi^2} - 2\left(\frac{(2 - n^2\pi^2)(-1)^n}{n^3\pi^3} - \frac{2}{n^3\pi^3}\right)$$

Si $n = 2k$ es par

$$A_n = \frac{-2}{n\pi} - 2\left(\frac{2 - n^2\pi^2}{n^3\pi^3} - \frac{2}{n^3\pi^3}\right) = \frac{-2}{n\pi} - 2\left(\frac{2}{n^3\pi^3} - \frac{1}{n\pi} - \frac{2}{n^3\pi^3}\right) = 0$$

Si $n = 2k - 1$ es impar

$$A_n = \frac{2n\pi}{n^2\pi^2} - 2\left(-\frac{2 - n^2\pi^2}{n^3\pi^3} - \frac{2}{n^3\pi^3}\right) = \frac{2}{n\pi} + 2\left(\frac{2}{n^3\pi^3} - \frac{1}{n\pi} + \frac{2}{n^3\pi^3}\right) = \frac{8}{n^3\pi^3}$$

Por lo tanto

$$\begin{cases} A_{2k-1} = \dfrac{8}{(2k-1)^3\pi^3} & \text{si } n = 2k-1 \text{ es impar} \\ A_{2k} = 0 & \text{si } n = 2k \text{ es par} \end{cases}$$

Por otro lado, para calcular el coeficiente B_n se utiliza la otra condición inicial, o sea la derivada de la solución (I) y luego se reemplaza la condición de la derivada en $t = 0$, y se obtiene la expresión como

$$B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell} g(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx$$

Como en nuestro ejemplo $g(x) = 0$ resulta $B_n = 0$

Por lo tanto

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\pi t)\,\mathrm{sen}(n\pi x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k-1} \cos\big((2k-1)\pi t\big)\,\mathrm{sen}\big((2k-1)\pi x\big)$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(2k-1)^3\pi^3} \cos\big((2k-1)\pi t\big)\,\mathrm{sen}\big((2k-1)\pi x\big)$$

Si aproximamos hasta $k = 3$ la serie queda:

$$u(x,t) \cong \frac{8}{\pi^3}\left(\cos(\pi t)\,\mathrm{sen}(\pi x) + \frac{1}{27}\cos(3\pi t)\,\mathrm{sen}(3\pi x) + \frac{1}{125}\cos(5\pi t)\,\mathrm{sen}(5\pi x)\right)$$

Si calculamos para $x = 0.5$ $t = 8$

$$u(0.5,8) = 0.2505$$

Comparando con el valor obtenido con el método de D'Alembert es

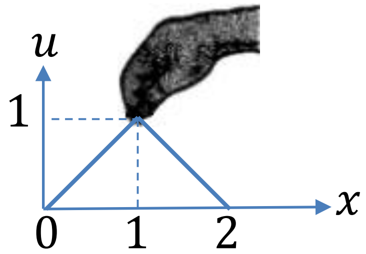
$$u(0.5,8) = \frac{1}{4} = 0.25$$

Mientras más términos se toman en la sumatoria más aproximado será el valor obtenido al exacto.

Nota:

- El método de D'Alembert siempre da el valor exacto en forma puntual. Es un método que no me da una ecuación de la solución, que me permita analizar la elongación, graficarla derivarla o integrarla.
- El método de Separación de Variables da por resultado una serie, y me permite una información más general de la solución, pero al calcularla en un valor de *x* y *t* determinado el resultado es aproximado, mientras más términos tomo de la serie menor será el error. La ventaja de Separación de Variables es que es un procedimiento que se aplica a una amplia gama de EDDP (como veremos más adelante) a diferencia de D'Alembert que brinda un procedimiento exacto pero particular para esta EDDP.

Ejemplo 6: Hallar la evolución temporal de una cuerda que inicialmente se encuentra con velocidad nula y en la posición descripta en la figura.



Esto es

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$g(x) = 0$$

Además, asumir $a = 2$ y que la cuerda está amarrada en los extremos.

NOTA

Para hallar la solución se debe hacer el planteo teórico de la solución como producto de dos funciones, reemplazarla en la EDDP, y luego hallar las constantes según las condiciones dadas. En la práctica y el parcial se debe hacer todo el proceso para evitar memorizar fórmulas y saber hacer frente a casos especiales.

Solución

Hallemos las constantes que determinan la solución $u(x,t)$ al problema, siendo

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi a}{\ell} t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{\ell} t\right) \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \qquad (14)$$

donde

$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) dx = \int_0^{2} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2} x\right) dx$$

En este caso, $\ell = 2$, $T = 4$ y como $f(x)$ está definido por partes, debemos particionar la integral

$$A_n = \int_0^1 x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2} x\right) dx + \int_1^2 (2 - x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2} x\right) dx$$

Integrando por partes ambas integrales resulta

$$A_n = \left[\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2} x\right) - \frac{2}{n\pi} x \cos\left(\frac{n\pi}{2} x\right) \right]_0^1$$
$$+ \left[-\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2} x\right) + \frac{2}{n\pi} (x - 2) \cos\left(\frac{n\pi}{2} x\right) \right]_1^2$$

Aplicando regla de Barrow

$$A_n = \left[\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] - \left[\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \operatorname{sen} 0 - 0\right]$$
$$+\left[-\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \operatorname{sen} n\pi + 0\right] - \left[-\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{n\pi}(-1)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

Usando que $\operatorname{sen} n\pi = 0$ y resolviendo

$$A_n = \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$
$$A_n = 2\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{8}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Para n par, $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$, mientras que para n impar se tiene

$$\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \pm 1$$

$$A_n = \frac{8}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \pm\dfrac{8}{n^2\pi^2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Por otro lado, las constantes B_n vienen dadas por

$$B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell} g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx = \frac{1}{n\pi}\int_0^2 0\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx = 0$$

Por lo tanto, la solución al problema viene dada por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{n\pi a}{\ell}t\right) + B_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{\ell}t\right)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

Para tomar solamente los valores de n impares reemplazamos $n = 2k-1$

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\right)\cos\big((2k-1)\pi t\big)\operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}x\right)$$

Si consideramos los primeros términos de la serie queda

$$u(x,t) \cong \frac{8}{\pi^2}\left(\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}\cos(\pi t)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{1}{9}\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{-1}\cos(3\pi t)\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}x\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{25}\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}\right)}_{1}\cos(5\pi t)\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}x\right) + \cdots\right)$$

Luego

$$u(x,t) \cong \frac{8}{\pi^2}\left(\cos(\pi t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{1}{9}\cos(3\pi t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{2}x\right) + \frac{1}{25}\cos(5\pi t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{2}x\right) + \cdots\right)$$

Por ejemplo, la posición de la cuerda en el punto $x = 1$ en el tiempo $t = 2$ viene dada por

$$u(1,2) \cong \frac{8}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81}\right) = 0.95960$$

$$u(1,2) \cong \frac{8}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2}\right) = 0.97110$$

Claramente esta aproximación mejorará si se consideran más términos de la serie, aunque estos términos cada vez serán más chicos hasta volverse insignificantes. Por ejemplo:

si se suma hasta $n = 100$ la aproximación es $u(1,2) \cong 0.9959$

si se suma hasta $n = 1000$ la aproximación es $u(1,2) \cong 0.9996$

El método de separación de variables brinda la solución exacta para cualquier punto x y cualquier tiempo t, pero lo da en forma de serie, por lo que en la práctica termina siendo una solución aproximada.

Por otro lado, el método de D'Alembert brinda la solución exacta:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\tau)d\tau$$

El periodo de f es $T = 2\ell = 4$. Luego

$$\begin{aligned} u(1,2) &= \frac{1}{2}[f(5) + f(-3)] = \frac{1}{2}[f(4\times 1 + 1) + f(4\times(-1)+1)] \\ &= \frac{1}{2}[f(1) + f(1)] = f(1) = 1 \end{aligned}$$

<u>Ejemplo 7:</u>

Hallar la evolución temporal de una cuerda que inicialmente se encuentra en reposo $f(x) = 0$, pero se le aplica una velocidad inicial $g(x) = 1$. Además, asumir nuevamente que $a = \ell = 2$ y que la cuerda está amarrada en los extremos.

Análogamente que en el caso anterior haciendo todo el razonamiento teórico se llaga a

Solución:

Hallemos las constantes que determinan la solución $u(x,t)$ al problema

$$A_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx = \int_0^2 0\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx = 0$$

Por otro lado, las constantes B_n vienen dadas por

$$B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell} g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx = \frac{1}{n\pi}\int_0^2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx$$

$$B_n = \frac{1}{n\pi}\frac{-2}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\right]\Big|_0^2 = -\frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - \cos 0) = -\frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1)$$

$$B_n = \begin{cases} \dfrac{4}{n^2\pi^2} & \text{si } n = 2k-1 \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n = 2k \text{ es par} \end{cases}$$

Por lo tanto, la solución al problema viene dada por

$$u(x,t) = \sum_{n \text{ impares}} \frac{4}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}(n\pi t)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}\operatorname{sen}\big((2k-1)\pi t\big)\operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}x\right)$$

Por ejemplo, la posición de la cuerda en el punto $x = 1$ en el tiempo $t = 0.5$ viene dada por

$$u(1,0.5) = \frac{4}{\pi^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{9\pi^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{4}{25\pi^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \frac{4}{49\pi^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{7\pi}{2}\right) + \cdots$$

$$u(1,0.5) = \frac{4}{\pi^2} + \frac{4}{9\pi^2} + \frac{4}{25\pi^2} + \frac{4}{49\pi^2} + \cdots$$

si se suma hasta $k = 4$ la aproximación es $u(1,0.5) \cong 0.4748$

si se suma hasta $k = 10$ la aproximación es $u(1,0.5) \cong 0.4899$

si se suma hasta $k = 100$ la aproximación es $u(1,0.5) \cong 0.4990$

si se suma hasta $k = 1000$ la aproximación es $u(1,0.5) \cong 0.4999$

Por otro lado, aplicando el método de D'Alembert resulta la solución exacta:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\tau)d\tau$$

$$u(1,0.5) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\tau)d\tau = \frac{1}{4}\int_0^2 d\tau = 0.5$$

Note que los límites de integración están entre 0 y 4, o sea, dentro del dominio de g (sin extender). Veamos que sucede cuando no se da esta situación. Calculemos $u(x,t)$ para $x = 1$ y $t = 2.5$.

$$u(1{,}2.5) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\tau)d\tau = \frac{1}{4}\int_{-4}^{6} g(\tau)d\tau$$

Si un límite es positivo y el otro negativo, entonces se usa el resultado de integrales de funciones impares que nos permite afirmar que

$$\int_{-4}^{4} g(\tau)d\tau = 0$$

Luego

$$u(1{,}2.5) = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4} g(\tau)d\tau + \frac{1}{4}\int_{4}^{6} g(\tau)d\tau = \frac{1}{4}\int_{4}^{6} g(\tau)d\tau$$

En otras palabras, la integral de una función impar es par, y por ende podemos cambiar el signo de los límites de integración sin problema alguno, esto es

$$\int_{-4}^{6} g(\tau)d\tau = \int_{4}^{6} g(\tau)d\tau$$

debemos calcular la integral y luego trasladar los límites de integración entre $(0,\ell) = (0{,}2)$ que es donde está definida la función $g(x)$ y su integral.

$$u(1{,}2.5) = \frac{1}{4}\int_{4=4+0}^{6=4+2} g(\tau)d\tau = \frac{1}{4}\int_{0}^{2} g(\tau)d\tau = \frac{1}{4}\int_{0}^{2} d\tau = \left.\frac{\tau}{4}\right|_{0}^{2} = \frac{1}{2}$$