Universidad Nacional de San Juan

Facultad de Ingeniería

# MATEMÁTICA APLICADA

Ingeniería Mecánica
Ingeniería Electromecánica

Equipo de Cátedra

| | |
|---|---|
| Profesor Titular | Dr. Javier Gimenez |
| Jefe de Trabajos Prácticos | Dr. Emanuel Tello |

AÑO 2023

# ECUACIONES DEL TIPO PARABÓLICAS

Aparecen en los fenómenos de conducción de calor y de difusión, su forma más simple es.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

## *Deducción:*

Planteamos la ecuación de balance del calor para un cuerpo o volumen de trabajo $V$: Del calor generado $Q_g$ parte se absorbe $(Q_a)$ y parte se transmite o se propaga $(Q_c)$. Esto es

$$Q_g = Q_a + Q_c \qquad (1)$$

Analicemos cada uno de estos conceptos por separado.

***Propagación del calor en el espacio:***

Sea $u = u(x, y, z, t)$ la temperatura en el punto $P(x, y, z)$ en un instante $t$. Si $u$ no es constante, entonces surgen flujos térmicos dirigidos desde los lugares de mayor temperatura $u$ hacia los lugares de menor temperatura $u$. De acuerdo a la Ley de Fourier, este flujo térmico se representa con el campo vectorial

$$\vec{Q} = -k.\overrightarrow{\mathrm{grad}\, u}$$

cuya dirección es la de máxima propagación, o sea perpendicular a las isotermas (superficies de nivel) $u = u_i$. Además, $k$ se conoce como constante de conductividad térmica.

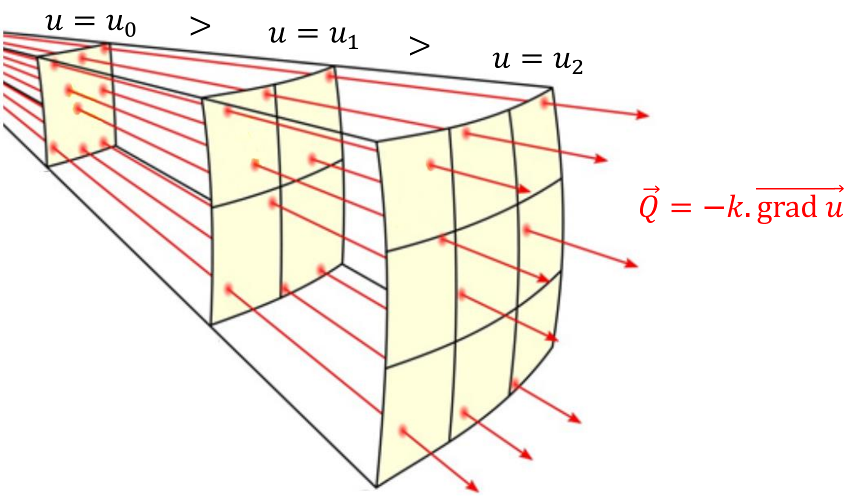


Figura 1

Si consideramos la superficie cerrada $S$ que encierra al volumen de trabajo V, entonces la cantidad de calor $Q_c$ que sale de V (o se propaga desde V) se obtiene aplicando el teorema de la divergencia (o de Gauss),

$$
\begin{aligned}
Q_c = \oiint_S \vec{Q}\cdot\overrightarrow{dS} &= \iiint_V \mathrm{div}\vec{Q}\, dV \\
&= -\iiint_V \mathrm{div}\left(k.\overrightarrow{\mathrm{grad}\, u}\right) dV \\
&= -\iiint_V k.\underbrace{\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}\, u}\right)}_{\Delta u} dV \\
&= -\iiint_V k\,\Delta u\, dV \qquad (2)
\end{aligned}
$$

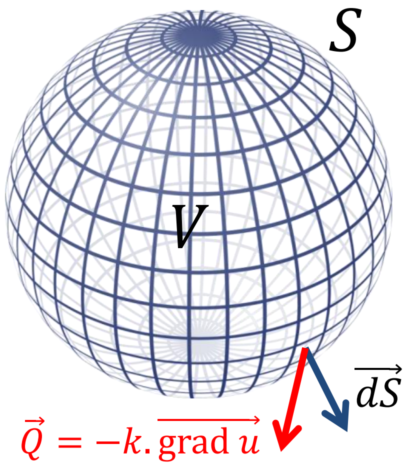


Figura 2

donde $\Delta u$ es el Laplaciano de $u$ dado por

$$\Delta u = \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}\, u}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

***Calor Absorbido:*** El calor total absorbido por unidad de tiempo viene dado por

$$\mathrm{Q_a} = \iiint_V \mathrm{c}\rho \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} \mathrm{dV} \qquad (3)$$

donde $\frac{\partial u}{\partial t}$ representa la variación de temperatura en cada punto de un cuerpo o volumen de trabajo V; c es el calor específico del cuerpo; y ρ es la densidad del cuerpo

***Calor generado:*** El calor generado por unidad de tiempo dentro del volumen de trabajo $V$ es:

$$Q_g = \iiint_V F dV \qquad (4)$$

donde $F$ representa la densidad volumétrica de calor generado por unidad de tiempo.

## ***Ecuación de la conducción del calor:***

Reemplazando (2), (3) y (4), en (1), resulta que

$$\iiint_V F dV = \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV - \iiint_V k.\Delta u\, dV$$

Luego:

$$\iiint_V \left(F - c\rho\frac{\partial u}{\partial t} + k\Delta u\right) dV = 0$$

De la arbitrariedad del volumen tomado surge que el integrando es cero, esto es:

$$\boxed{F - c\rho\frac{\partial u}{\partial t} + k\Delta u = 0} \qquad (5)$$

## *Casos Particulares:*

Si no existen fuentes de calor, entonces $F = 0$, y por ende (5) toma la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u \qquad (6)$$

donde $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ es una constante denominada conductividad.

En el caso unidimensional $\mathrm{u} = \mathrm{u}(\mathrm{x}, \mathrm{t})$, $0 \leq x \leq \ell$, $t \geq 0$, representa la evolución temporal de la temperatura a lo largo de una barra de longitud $\ell$. En este caso, el Laplaciano queda reducido a una sola variable, o sea

$$\Delta \mathrm{u} = \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2}$$

y la ecuación (6) toma la forma:

$$\boxed{\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} = \mathrm{a}^2 \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2}} \qquad (7)$$

## ***Ecuación de Difusión:***

En forma totalmente análoga a las temperaturas, las distintas concentraciones de un gas en un medio (o de una sustancia diluida en una solución) originan difusión de éste a los lugares de mayor concentración a los de menor. El problema se modela con (6) siendo $u$ la concentración y $a^2$ es el coeficiente de difusión. La ecuación final es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$$

## ***Condiciones Complementarias:***

*Caso de la barra de longitud $\ell$:*

***Condición Inicial:*** Se da solo una que es la temperatura inicial, (debido a que en la EDDP aparece solamente la derivada primera respecto del tiempo $t$) es decir:

$$u(x, 0) = f(x)$$

***Condiciones de Contorno***: Se presenta en alguna de las siguientes formas, siempre considerando para todo tiempo $t$:

1. Se da la temperatura en los extremos de la barra:
$$u(0,t) \quad \text{y} \quad u(\ell,t)$$
2. Se da el valor de la derivada en los extremos:
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\ell,t)$$
Estas condiciones aparecen cuando se da el flujo térmico en el extremo. Por ejemplo para $x = \ell$ (Figura 3)
$$\vec{Q} \cdot \vec{n} = -k.\overrightarrow{\text{grad}\, u} \cdot \vec{e}_1 = -k\frac{\partial u}{\partial x}(\ell,t)$$


Figura 3

3. Se da una relación entre el valor de la derivada y la función. Por ejemplo: para $x = \ell$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(\ell,t) = -\lambda(u(\ell,t) - U_0), \qquad \lambda = \frac{h}{k}$$
Esta forma nos dice que el flujo en el extremo $x = \ell$, $\left(-k\frac{\partial u}{\partial x}(\ell,t)\right)$ se realiza según la ley de Newton $Q = h(u - U_0)$ donde $U_0$ es la temperatura del medio exterior y $\lambda$ es el coeficiente de intercambio térmico.

***<u>METODO DE SEPARACION DE VARIABLES</u>***

Apliquemos ahora el mismo procedimiento que utilizamos para resolver el problema de onda. Hallar la solución de:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (1) \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0 & \text{para todo } t \ \ (2) \\ u(x,0) = f(x) & \text{para todo } x \ \ (3) \end{cases}$$

<u>Solución:</u>

<u>Paso a)</u> Si $u(x,t) = X(x)T(t)$ tenemos
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = XT' \end{cases}$$

Reemplazando en (1) resulta:
$$XT' = a^2X''T$$

Paso b) Separando variables

$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{X''}{X} = \text{cte} \quad (4)$$

Paso c) Aplicando las condiciones de contorno

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \qquad \forall t \quad \Longrightarrow \quad X(0) = 0$$
$$u(l,t) = X(\ell)T(t) = 0 \qquad \forall t \quad \Longrightarrow \quad X(\ell) = 0$$

obtenemos el problema de Sturm–Liouville. En efecto:

$$\begin{cases} X'' - \text{cte.}X = 0 \\ X(0) = X(\ell) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Paso d) Análogamente a lo realizado en el paso d) de la solución de la ecuación de ondas, para obtener una solución distinta de la trivial, se debe considerar cte $= -\lambda^2$, resultando que el problema (5) sólo tiene solución para $\lambda_n = \frac{n\pi}{\ell}$ con $n$ un entero positivo. Luego hay una solución de (5) para cada $n$, y viene dada por:

$$X_n(x) = C_{2,n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \qquad (6)$$

Paso e) Para cada $\lambda_n$ (o para cada $n$) resolvamos la EDO de primer orden en la variable $t$

$$T_n' + a^2\lambda_n^2 T_n = 0 \qquad (7)$$

EDO homogénea de primer orden cuya ecuación característica es:

$$r + a^2\lambda_n^2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad r = -a^2\lambda_n^2$$

Luego recordando que $\lambda_n = \frac{n\pi}{\ell}$ la solución es :

$$T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 t}$$

Paso f) Conformar las funciones

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = C_n e^{-\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

donde $C_n = C_{2,n}A_n$, y con ellas la función solución será

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x,t)$$
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \qquad (8)$$

La función (8) satisface la ecuación (1) y las condiciones de contorno (2) . Calculemos ahora las $C_n$ de modo tal que $u$ satisfaga también la condición inicial (3).

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

Si observamos esta expresión , no es otra cosa que el desarrollo en serie de Fourier de $f(x)$ , en el cual solo aparecen los términos de los senos, esto significa que corresponde al desarrollo de Fourier de una extensión impar de la función $f(x)$. El valor dela frecuencia angular es $\omega_0 = \pi/\ell$, por lo tanto el período es $T = 2\ell$. El coeficiente $C_n$ corresponde al coeficiente $b_n$ del desarrollo en serie de Fourier, luego por ser impar se calcula como

$$C_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx \qquad (9)$$

*En resumen:*

La ecuación diferencial correspondiente a la distribución de temperatura de una barra de longitud $\ell$ está dada por

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Y su solución es

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

Donde:

$$C_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx$$

**Ejemplo1 :** Resolver:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(3,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) = 5 \end{cases}$$

Usando (8) resulta:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{2n^2\pi^2}{9}t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}x\right) \qquad (10)$$

donde $C_n$ se halla usando (9) del siguiente modo

$$C_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx$$

$$C_n = \frac{2}{3}\int_0^3 5\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{3}x\right)dx = -\frac{10}{3}\frac{3}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{3}x\right)\Big|_0^3$$

$$C_n = -\frac{10}{n\pi}(\cos(n\pi)-1) = -\frac{10}{n\pi}((-1)^n-1)$$

$$C_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{20}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Reemplazando en (10), resulta

$$u(x,t) = \sum_{n\ \text{impar}} \frac{20}{n\pi} e^{-\frac{2n^2\pi^2}{9}t}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{3}x\right)$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{20}{(2k-1)\pi} e^{-\frac{2(2k-1)^2\pi^2}{9}t}\,\mathrm{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi}{3}x\right)$$

## ***<u>Caso no homogéneo</u>:***

Supongamos ahora que se nos presenta el mismo problema pero con condiciones de contorno no homogéneas, esto es, modificando las condiciones (2)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = a \quad \forall t \\ u(\ell,t) = b \quad \forall t \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \qquad (11)$$

Si queremos resolver este problema utilizando el mismo procedimiento aplicado para el caso homogéneo, en el paso c) no obtendríamos condiciones de contorno nulas para (5), y por ende, no podríamos continuar con la resolución. La idea es hallar un problema asociado con condiciones de contorno homogéneas, resolverlo, y usar esa solución para resolver el caso no homogéneo.

Se propone como solución una traslación

$$u(x,t) = Ax + B + w(x,t) \qquad (12)$$

donde $w(x,t)$ satisface la misma EDDP con condiciones homogéneas , es decir es solución de

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

pero con condiciones de contorno homogéneas, esto es

$$w(0,t) = 0$$
$$w(\ell,t) = 0$$

Si aplicamos a la solución propuesta (12) las condiciones de contorno del problema original resulta:

$$u(0,t) = a = A0 + B + \underbrace{w(0,t)}_{0}$$

$$\boxed{B = a}$$

$$u(\ell,t) = b = A\ell + B + \underbrace{w(\ell,t)}_{0}$$

$$b = \ell A + a$$

$$\boxed{A = \frac{b-a}{\ell}}$$

Luego (12) resulta ser

$$u(x,t) = \frac{b-a}{\ell}x + a + w(x,t) \quad (13)$$

Si observamos esta expresión, resta calcular $w(x,t)$. Para ello se necesita conocer la condición inicial asociada al problema homogéneo

Veamos cuál debería ser la condición inicial del problema homogéneo asociado. Teniendo en cuenta la solución propuesta y la condición inicial del problema planteado resulta

$$f(x) = u(x,0) = \frac{b-a}{\ell}x + a + w(x,0)$$

Luego

$$w(x,0) = f(x) - \frac{b-a}{\ell}x - a \quad (14)$$

*En resumen:* Para resolver el problema no homogéneo, se debe hallar $w(x,t)$ que es solución del problema homogéneo asociado cuya condición inicial se obtiene de reemplazar la condición inicial dada, en la solución traslada del problema no homogéneo

**Ejemplo 2:** Resolver

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = 10, \\ u(3,t) = 40 \\ u(x,0) = 10x + 15 \end{cases}$$

**<u>Solución</u>:**

Se plantea la solución

$$u(x,t) = Ax + B + w(x,t)$$

Donde

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ w(0,t) = w(3,t) = 0 \\ w(x,0) = ? \end{cases}$$

- Cálculo de las constantes $A$ y $B$

  Reemplazando las condiciones de contorno para $u(x,t)$ se tiene

$$u(0,t) = 10$$

$$u(0,t) = A.0 + B + \underbrace{w(0,t)}_{0}$$

$$\boxed{B = 10}$$

$$u(3,t) = 40$$

$$u(3,t) = A.3 + B + \underbrace{w(3,t)}_{0}$$

$$40 = 3A + 10 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{A = 10}$$

  Luego

$$u(x,t) = 10x + 10 + w(x,t)$$

- Cálculo de la condición inicial para $w(x,t)$
  Considerando la condición inicial dada

$$u(x,0) = 10x + 15$$

$$u(x,0) = 10x + 10 + w(x,0)$$

$$w(x,0) = 5$$

Por lo tanto, el problema homogéneo asociado es

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ w(0,t) = w(3,t) = 0 \\ w(x,0) = 5 \end{cases}$$

Este problema por casualidad resultó ser el mismo que se resolvió en el Ejemplo anterior, y cuya solución es

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{20}{(2k-1)\pi} e^{-\frac{2(2k-1)^2\pi^2}{9}t} \operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi}{3}x\right)$$

Si no fuese por esta casualidad deberíamos haberlo resuelto usando separación de variables, para luego decir que la solución del problema no homogéneo viene dada por

$$u(x,t) = 10x + 10 + w(x,t)$$

$$u(x,t) = 10x + 10 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{20}{(2k-1)\pi} e^{-\frac{2(2k-1)^2\pi^2}{9}t} \operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi}{3}x\right)$$