Universidad Nacional de San Juan

Facultad de Ingeniería

MATEMÁTICA APLICADA

Ingeniería Mecánica
Ingeniería Electromecánica

Equipo de Cátedra

Profesor Titular	Dr. Javier Gimenez
Jefe de Trabajos Prácticos	Dr. Emanuel Tello

AÑO 2023

Segunda Semana , Segunda Clase

ECUACIONES DEL TIPO ELÍPTICAS:

Vimos que la temperatura satisface la ecuación:

$$F = c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u$$

Si el proceso es estacionario, entonces u no es función del tiempo, es decir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Resultando lo que se conoce con el nombre de Ecuación de Poisson

$$\Delta u + f = 0, \qquad f = \frac{F}{k}$$

y si no existen fuentes $F = 0$, surge la llamada Ecuación de Laplace

$$\Delta u = \operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad} u}\right)$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (1)$$

Toda función u que satisface (1) y es continua hasta la derivada segunda se llama función <u>armónica</u>.

Al no ser u función del tiempo, sólo existen condiciones de contorno, las cuales vienen dadas de alguna de las siguientes formas:

1. Problema de Dirichlet:
$$u(x, y, z) = f_1(x, y, z)$$
para todo (x, y, z) en el borde o frontera del dominio de trabajo.
2. Problema de Neümann:
$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, y, z) = f_2(x, y, z)$$
para todo (x, y, z) en el borde o frontera del dominio de trabajo, siendo $\vec{n}$ el vector normal a la frontera.
3. Problema Mixto:
$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, y, z) \pm h\big(u - f_3(x, y, z)\big) = 0$$
para todo (x, y, z) en el borde o frontera del dominio de trabajo, siendo $\vec{n}$ el vector normal a la frontera.

Las funciones f_1, f_2, f_3 deben ser continuas por partes.

Otros ejemplos donde aparece la ecuación de Laplace son:

A) Potencial de un Campo Electroestático:

Sabemos que $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}\ \phi}$ y de la ley de Gauss:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{q}{E} = \iiint_V \frac{\rho}{E} dV$$

Usando el teorema de la divergencia: $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{E}$ y en consecuencia obtenemos la Ecuación de Poisson

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}\ \phi}) = \Delta\phi = -\frac{\rho}{E}$$

Si no existen fuentes:

$$\Delta\phi = 0$$

A la función ϕ solución de $\Delta u = 0$, lo llamaremos potencial.

B) Potencial de una Corriente Estacionaria:

Si no existen fuentes: $\text{div}\vec{J} = 0$

El campo es potencial: $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}\ \phi}$

La ley de Ohm es: $\vec{J} = T\vec{E}$

En Resumen:

$$\Delta\phi = 0$$

C) *Corriente Potencial de un Fluido:*

Si $\vec{V}$ es potencial: $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}\ \phi}$

Si ρ en cte. y no existen fuentes:

$$\iint \vec{V} \cdot \overrightarrow{dS} \rightarrow \text{div}\vec{V} = 0$$

En Resumen:

$$\Delta\phi = 0$$

Principio del Valor Máximo:

Toda función armónica $u(x, y)$ toma su máximo y mínimo valor sobre la frontera de su dominio de definición.

METODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

Problema 1:

Resolver el siguiente problema de la distribución de temperatura en una lámina 2D rectangular, $\overline{oacb}$, suponiendo que en el lado $\overline{ob}$ la temperatura es U_0 y en los tres lados restantes la temperatura vale cero (Figura 1)

Solución

El problema planteado matemáticamente es:

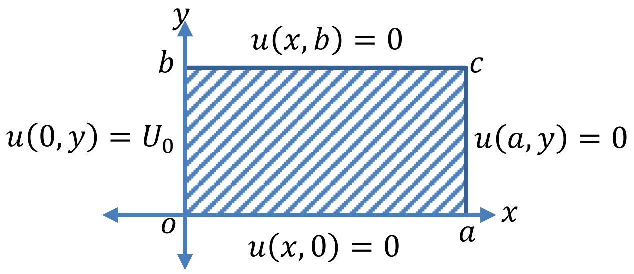

Figura 1

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(0,y) = U_0 \\ u(a,y) = 0 \\ u(x,b) = 0 \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

Lo resolvemos por el método de separación de variables. Por lo tanto se supone que la solución puede expresarse como un producto de dos funciones

Resolvemos la ecuación de Laplace con las condiciones de contorno:

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \qquad (1)$$

Paso a) Si $u(x,y) = X(x)Y(y)$ tenemos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''Y \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = XY'' \end{cases}$$

Reemplazando en (1) resulta:

$$XY'' + X''Y = 0$$

Paso b) Separando variables

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \text{cte} \qquad (2)$$

Paso c) Considerando las condiciones de contorno

$$\begin{cases} 0 = u(x,0) = X(x)Y(0) & \Longrightarrow \quad Y(0) = 0 \\ 0 = u(x,b) = X(x)Y(b) & \Longrightarrow \quad Y(b) = 0 \\ 0 = u(a,y) = X(a)Y(y) & \Longrightarrow \quad X(a) = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Si observamos las condiciones de contorno (3) vemos que la función $Y(y)$se anula dos veces , luego de (2), obtenemos el problema de Sturm–Liouville

$$\begin{cases} Y'' - \text{cte}.Y = 0 \\ Y(0) = Y(b) = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Nota:

Si los lados verticales son los que presentan condiciones de contorno nulas, entonces en (4) queda un problema de Sturm–Liouville con incógnita X en lugar de Y.

Paso d) Por un razonamiento análogo al realizado en los pasos d) de las soluciones correspondientes a los modelos anteriores, se debe considerar que $cte = -\lambda^2$, para obtener una solución distinta de la trivial

$$Y'' + \lambda^2 Y = 0$$
$$Y(0) = Y(b) = 0$$

Luego:

$$Y(y) = C_1 \cos(\lambda y) + C_2 sen(\lambda y)$$

Aplicando las condiciones de contorno dadas en (4):

$$Y(0) = C_1 = 0$$
$$Y(b) = C_2 sen(\lambda b) = 0$$

Resultando que para que sea un a solución distinta de la trivial del problema (4) sólo tiene solución para $\lambda_n = \frac{n\pi}{b}$ con n un entero positivo. Luego hay una solución de (4) para cada n, y viene dada por:

$$Y_n(y) = C_{2,n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \qquad (5)$$

Paso e) Obtener la solución $X(x)$

De (2) reemplazando la constante por λ_n y despejando X'' para cada n se obtiene

$$X_n'' - \lambda_n^2 X_n = 0 \qquad (6)$$

E.D. Ordinaria Homogénea de Segundo orden, cuya ecuación característica tiene raíces reales y distintas, por loa tanto su solución es

$$X_n(x) = A_n e^{\lambda_n x} + B_n e^{-\lambda_n x} \qquad (7)$$

Incluyendo ahora la condición de contorno nula restante (4), resulta

$$0 = u(a,y) = X(a)Y(y) \quad \Longrightarrow \quad X(a) = 0$$

Esto implica que cada X_n debe verificar que

$$X_n(a) = 0 \qquad (8)$$

Reemplazando (8) en (7)

$$0 = X_n(a) = A_n e^{\lambda_n a} + B_n e^{-\lambda_n a} \quad \Longrightarrow \quad B_n = -A_n e^{2\lambda_n a} \qquad (9)$$

Reemplazando (9) en (7)

$$X_n(x) = A_n e^{\lambda_n x} - A_n e^{2\lambda_n a} e^{-\lambda_n x}$$

Sacando factor común la constante $A_n e^{\lambda_n a}$ y multiplicando y dividiendo por dos resulta:

$$X_n(x) = 2A_n e^{\lambda_n a} \underbrace{\frac{e^{\lambda_n (x-a)} - e^{-\lambda_n (x-a)}}{2}}_{\text{senh}(\lambda_n (x-a))}$$

$$X_n(x) = C_n \,\text{senh}\left(\frac{n\pi}{b}(x-a)\right) \qquad (10)$$

donde $C_n = 2A_n e^{\lambda_n a}$.

<u>Paso f)</u> De (5) y (10) se conforman las funciones

$$u_n(x,t) = X_n(x)Y_n(y) = C_n \,\text{senh}\left(\frac{n\pi}{b}(x-a)\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

donde las ctes. C_n absorben y unifican las constantes de (5) y (10). Luego

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x,y)$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \,\text{senh}\left(\frac{n\pi}{b}(x-a)\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \qquad (11)$$

La solución hallada (11) satisface la ecuación diferencial de Laplace planteada (1) y las condiciones de contorno homogéneas. Calculemos ahora las C_n de modo tal que u satisfaga también la condición de contorno distinta de cero. O sea

$$U_0 = u(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{C_n \,\text{senh}\left(-\frac{n\pi a}{b}\right)}_{b_n} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

Nuevamente si observamos esta expresión, vemos que corresponde al desarrollo en serie de Fourier de $u(0,y)$ extendido en forma impar, pue aparecen solamente término de seno, El valor de frecuencia angular es $\omega_0 = {}^{\pi}/_{b}$, por lo tanto el periodo es $T = 2b$. Entonces el coeficiente b_n del desarrollo de Fourier es

$$b_n = C_n \operatorname{senh}\left(-\frac{n\pi a}{b}\right) = \frac{2}{b}\int_0^b U_0 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy$$

$$C_n \operatorname{senh}\left(-\frac{n\pi a}{b}\right) = -\frac{2}{b}\frac{b}{n\pi}U_0 \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\Big|_0^b$$

$$C_n \operatorname{senh}\left(-\frac{n\pi a}{b}\right) = -\frac{2U_0}{n\pi}(\cos(n\pi) - 1)$$

$$C_n \operatorname{senh}\left(-\frac{n\pi a}{b}\right) = -\frac{2U_0}{n\pi}((-1)^n - 1)$$

$$C_n \operatorname{senh}\left(-\frac{n\pi a}{b}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{4U_0}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Además se cumple que

$$\operatorname{senh}\left(-\frac{n\pi a}{b}\right) = -\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)$$

Resultando que

$$C_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{-4U_0}{n\pi \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \qquad (12)$$

Reemplazando (12) en (11) y teniendo en cuenta que los n impares son de la forma $n = 2k - 1$, resulta que la solución al problema viene dada por

$$\boxed{u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4U_0}{(2k-1)\pi \operatorname{senh}\left(\frac{(2k-1)\pi a}{b}\right)} \operatorname{senh}\left(\frac{(2k-1)\pi}{b}(x-a)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi}{b}y\right)}$$

***Problema 2*:**

Veamos ahora el procedimiento para resolver la ecuación de Laplace

$$\Delta u = 0$$

en el rectángulo con las condiciones indicadas en la Figura 2.

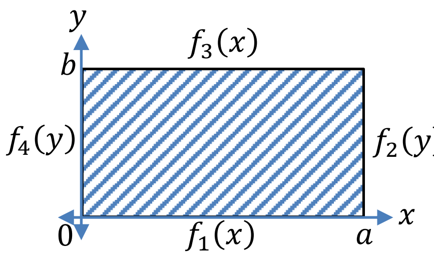

Figura 2

El modelo matemático es :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = f_1(x) \\ u(a,y) = f_2(y) \\ u(x,b) = f_3(x) \\ u(0,y) = f_4(y) \end{cases}$$

Dividiremos el problema en cuatro sub-problemas:

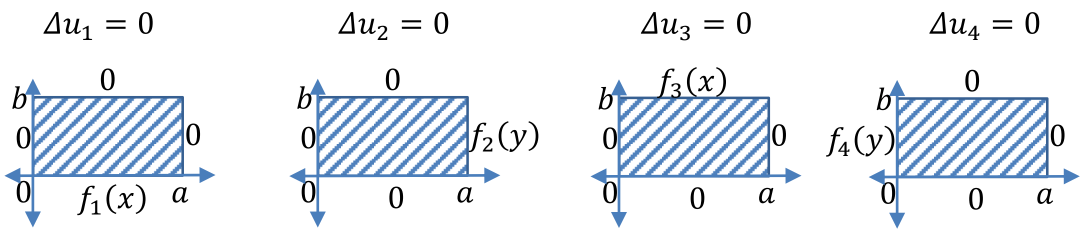

Figura 3

y la solución de cada una de ellas la llamaremos u_1, u_2, u_3, u_4 respectivamente. Luego

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

satisface el problema original, pues por la linealidad de las derivadas se tiene que

$$\Delta u = \Delta u_1 + \Delta u_2 + \Delta u_3 + \Delta u_4 = 0$$

Además reemplazando las condiciones de contorno

$$u(x,0) = u_1(x,0) + u_2(x,0) + u_3(x,0) + u_4(x,0)$$

$$u(x,0) = f_1(x) + 0 + 0 + 0 = f_1(x)$$

$$u(a,y) = u_1(a,y) + u_2(a,y) + u_3(a,y) + u_4(a,y)$$

$$u(a,y) = 0 + f_2(y) + 0 + 0 = f_2(y)$$

$$u(x,b) = u_1(x,b) + u_2(x,b) + u_3(x,b) + u_4(x,b)$$
$$u(x,b) = 0 + 0 + f_3(x) + 0 = f_3(x)$$

$$u(0,y) = u_1(0,y) + u_2(0,y) + u_3(0,y) + u_4(0,y)$$
$$u(0,y) = 0 + 0 + 0 + f_4(y) = f_4(y)$$

Se resuelve cada uno de los sub-problemas por separado, y se suman las soluciones respectivas

<u>Problema 3</u>: Resolver la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ en la placa rectangular con las condiciones indicadas en la Figura4

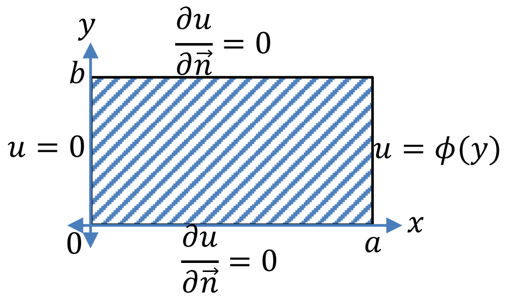

Figura 4

<u>**Solución**</u>:

El vector normal $\vec{n}$ salientes en las caras horizontales inferior y superior es $\vec{n} = -\vec{e}_2$ y $\vec{n} = \vec{e}_2$ respectivamente. Por lo que las expresiones para los flujos en esas caras vienen dados por

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x,0) = \overrightarrow{\text{grad}\, u} \cdot (-\vec{e}_2) = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x,0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot (0,-1) = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x,0) = \underline{-\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0}$$

Análogamente

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x,b) = \overrightarrow{\text{grad}\, u} \cdot \vec{e}_2 = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x,b) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot (0,1) = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x,b) = \underline{\frac{\partial u}{\partial y}(x,b) = 0}$$

Por lo tanto, el planteo matemático del problema resulta será:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0 \\ u(a,y) = \phi(y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,b) = 0 \\ u(0,y) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Resolvemos la ecuación de Laplace con las condiciones de contorno siguiendo el procedimiento de separación de variables:

<u>Pasos a) y b)</u> Si $u(x,y) = X(x)Y(y)$ resulta de (1) que

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = cte \qquad (2)$$

<u>Paso c)</u> Considerando dos lados opuestos con condiciones de contorno nulas, resulta que

$$0 = \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = X(x)Y'(0) \quad \Longrightarrow \quad \underline{Y'(0) = 0}$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial y}(x,b) = X(x)Y'(b) \quad \Longrightarrow \quad \underline{Y'(b) = 0}$$

Luego de (2), y las condiciones de contorno nulas se obtiene

$$\begin{cases} Y'' - cte.Y = 0 \\ Y'(0) = Y'(b) = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

<u>Paso d)</u> Debido a que Y' debe tener al menos dos raíces, Y no puede ser una combinación lineal de exponenciales. Luego se debe considerar $cte = -\lambda^2$, resultando que

$$\begin{cases} Y'' + \lambda^2 Y = 0 \\ Y'(0) = Y'(b) = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Donde las raíces de la Ecuación Característica son complejas conjugadas, $(0 \pm \lambda j)$. Entonces la solución es

$$Y(y) = C_1 \cos \lambda y + C_2 \operatorname{sen} \lambda y$$

Para calcular las constantes se debe derivar la función $Y(y)$ y reemplazar las condiciones de contorno

$$Y'(y) = -C_1 \lambda \operatorname{sen} \lambda y + C_2 \lambda \cos \lambda y$$

Luego

$$Y'(0) = 0 = C_2\lambda \qquad \Longrightarrow \quad \underline{C_2 = 0}$$

$$Y'(b) = 0 = -C_1\lambda \operatorname{sen} \lambda b$$

$$\operatorname{sen} \lambda b = 0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\lambda_n = \frac{n\pi}{b}}$$

Las implicaciones valen pues $\lambda = 0$ o $C_1 = 0$ (sumado a que ya $C_2 = 0$) conducirían a una solución trivial.

Nuevamente tenemos una solución para cada n entero positivo, y viene dada por:

$$Y_n(y) = C_{1,n} \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \qquad (5)$$

Nota: Las condiciones de contornos dadas en términos de flujos condujo a soluciones Y_n en forma de coseno y no en forma de seno como resultó anteriormente.

<u>Paso e)</u> Para cada λ_n (o para cada n) resolvamos

$$X_n'' - \lambda_n^2 X_n = 0 \qquad (6)$$

obteniendo

$$X_n(x) = A_n e^{\lambda_n x} + B_n e^{-\lambda_n x} \qquad (7)$$

Incluyendo ahora la condición de contorno nula restante , resulta

$$0 = u(0, y) = X(0)Y(y) \quad \Longrightarrow \quad X(0) = 0$$

Esto implica que cada X_n debe verificar que

$$X_n(0) = 0 \qquad (8)$$

Reemplazando (8) en (7)

$$0 = X_n(0) = A_n e^{\lambda_n 0} + B_n e^{-\lambda_n 0} \quad \Longrightarrow \quad B_n = -A_n \qquad (9)$$

Reemplazando (9) en (7)

$$X_n(x) = A_n e^{\lambda_n x} - A_n e^{-\lambda_n x}$$

$$X_n(x) = 2A_n \frac{e^{\lambda_n x} - e^{-\lambda_n x}}{2}$$

$$X_n(x) = C_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b} x\right) \qquad (10)$$

donde $C_n = 2A_n$.

Nota: Cuando la condición de contorno no homogénea se encuentra fuera de uno de los ejes, es más sencillo hallar la expresión de $X_n(x)$. Para más detalles comparar la complejidad de este paso con el paso e) del Problema 1.

Paso f) De (5) y (10) se conforman las funciones

$$u_n(x,t) = X_n(x)Y_n(y) = C_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

donde las ctes C_n absorben y unifican las constantes de (5) y (10). Luego

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x,y)$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \qquad (11)$$

La función (11) satisface la ecuación (1) y las condiciones de contorno homogéneas. Calculemos ahora las C_n de modo tal que u satisfaga también la condición de contorno distinta de cero.

$$\phi(y) = u(a,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{C_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}_{a_n}\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \qquad (12)$$

Con el mismo razonamiento que en los ejercicios anteriores resulta que (12) es el desarrollo en serie de Fourier con extensión par de la función $\phi(y)$ donde $\omega_0 = {}^{\pi}/_{b}$ y el período es $T = 2b$, luego el coeficiente a_n se calcula como

$$a_n = C_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right) = \frac{2}{b}\int_0^b \phi(y)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy$$

Luego

$$C_n = \frac{2}{b\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}\int_0^b \phi(y)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy \qquad (13)$$

La solución al problema viene dada por

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

Con los coeficientes dados por

$$C_n = \frac{2}{b\,\mathrm{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \int_0^b \phi(y) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) dy$$

BIBLIOGRAFÍA:

1) ANÁLISIS DE Fourier: MURRIA SPIECEL SERIE SCHAUM (MC GRAW HILL) (BIBLIOTECA).

2) ECUACIONES DE LA FÍSICA MATEMÁTICA: TIJONOV – SAMARSKY EDITORIAL MIR.