Universidad Nacional de San Juan

Facultad de Ingeniería

Materia: MATEMATICA APLICADA

Ingeniería Electromecánica-Ingeniería Mecánica

Guía de ejercicios prácticos:

Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales

Docentes de la cátedra:

Dr. Javier Gimenez, Profesor Titular

Dr. Emanuel Tello, Jefe de Trabajos Prácticos

2023

A: Problemas que involucran ecuaciones de tipo HIPERBÓLICO

1. Dado

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 3^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = 0 \qquad u(4,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) = 20 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) = 0 \end{cases}$$

a) Interpretar a qué modelo físico corresponden las ecuaciones planteadas.
b) Determinar $u(x,t)$ por el MVS.

2. Dado

$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx} \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 25 \\ u(0,t) = 0 \qquad u(4,t) = 0 \end{cases}$$

a) Determinar $u(x,t)$ por MVS.
b) Calcular $u(0.3{,}5)$ y $u(0.78{,}9)$ por el método de D'Alembert

3. Dado

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad a = 3 \\ u(x,0) = 10\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{5}{2}\pi x\right) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 0 \qquad u(2,t) = 0 \end{cases}$$

a) Determinar la elongación para cualquier x y t.
b) Calcule por D'Alembert la elongación para $x = 1.3$ y $t = 2$. Verifique este resultado.

4. Una cuerda homogénea sujeta en los extremos $x = 0$ y $x = \ell$, tiene en el momento inicial la forma de una parábola simétrica, con respecto a la perpendicular trazada por un punto $x = \ell/2$ y una altura inicial en dicho punto igual a h.
Determinar el desplazamiento $u(x,t)$ suponiendo velocidad inicial nula.
Ayuda: $f(x) = \dfrac{4h}{\ell^2} x(\ell - x)$

Rta: $$u(x,t) = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left((2n+1)\frac{\pi}{\ell} at\right) \mathrm{sen}\left((2n+1)\frac{\pi}{\ell} x\right)}{(2n+1)^3}$$

5. Una cuerda de longitud ℓ se encuentra en posición de equilibrio rectilíneo. En un momento que se toma como inicial, el punto $x = x_0$ recibe un golpe de martillo plano duro de anchura d que le comunica una velocidad cte. v_0.

Determinar $u(x,t)$. Ayuda: $g(x) = \begin{cases} v_0 & \text{si } x_0 - d/2 < x < x_0 + d/2 \\ 0 & \text{en el resto de los puntos} \end{cases}$

Rta: $u(x,t) = \dfrac{4v_0\ell}{\pi^2 a}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x_0}{\ell}\right)\text{sen}\left(\frac{nd\pi}{2\ell}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi a}{\ell}t\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$

6. Una cuerda de longitud $\ell = 3$, sujeta en sus extremos esta tendida entre los puntos $x = 0$ y $x = \ell$. En el punto $x = 1$ la cuerda se extiende hasta una pequeña distancia $h = 1$ con respecto a la posición de equilibrio y en el instante $t = 0$ se suelta con velocidad inicial nula. Determinar $u(x,t)$.

Ayuda: $f(x) = \begin{cases} x & si\ \ 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{x-3}{-2} & si\ \ 1 \le x \le 3 \end{cases}$

Rta: $u(x,t) = \dfrac{9}{\pi^2 a}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\cos\left(\frac{n\pi a t}{3}\right)$

B: Problemas que involucran ecuaciones de tipo PARABÓLICO

1. Dado

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = 0 \qquad u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) = 100 \end{cases}$$

a) Interpretar a qué modelo físico corresponden las ecuaciones planteadas.
b) Determinar $u(x,t)$ por el MVS.

2. Dada una barra de longitud igual a 3, con coeficiente de conductividad $a = \sqrt{2}$, con temperatura 10 y 40 en los extremos izquierdo y derecho respectivamente, y la temperatura en el instante inicial igual a $f(x) = 25 + 10x$.
a) Escribir el modelo matemático del problema planteado.
b) Determinar $u(x,t)$ por el MVS.

3. Dado

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = 0 \qquad u(\ell,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ 0 < x < \ell/2 \\ 0 & si\ \ \ell/2 < x < \ell \end{cases} \end{cases}$$

Determinar $u(x,t)$ por el MVS.

4. Resolver:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} x & si\ \ 0 \le x \le \ell/2 \\ \ell - x & si\ \ \ell/2 \le x \le \ell \end{cases} \end{cases}$$

Rta: $$u(x,t) = \frac{a\ell}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cdot e^{\frac{-(2n+1)^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi}{\ell}x\right)$$

5. Una varilla de longitud ℓ, tiene una temperatura inicial $f(x)$. Los extremos se mantienen en cero grados (0º) de temperatura. Averiguar $u(x,t)$ cuando:

$$a)\ f(x) = \frac{cx(l-x)}{\ell^2} \qquad\qquad b)\ f(x) = \operatorname{sen}\frac{\pi x}{\ell}$$

Rta:

$$a)\ \ u = \frac{8c}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cdot e^{\frac{-(2n+1)^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \cdot \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{\ell}$$

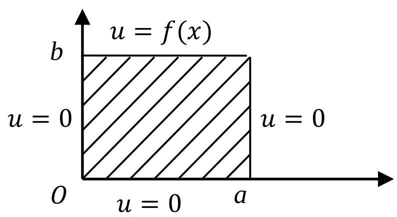
$$b)\ \ u = e^{\frac{-a^2\pi^2}{\ell^2}t}.\operatorname{sen}\frac{\pi x}{\ell}$$

6. Resolver:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = x + cx(\ell - x) \\ u(0,t) = 0 \qquad u(\ell,t) = \ell \end{cases}$$

C: Problemas que involucran ecuaciones de tipo ELÍPTICAS

1. Resolver el problema teniendo en cuenta las condiciones de contorno fijadas en la figura.



Rta: $$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

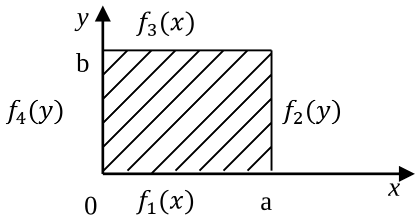
$$\text{con}\ \ C_n = \frac{2}{a.\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a f(x).\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$$

2. Resolver el problema correspondiente a la figura que se muestra a continuación, para el caso:

$$f_1(x) = B.\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right);$$

$$f_2 = f_3 = 0;$$

$$f_4(y) = Ay(b-y).$$



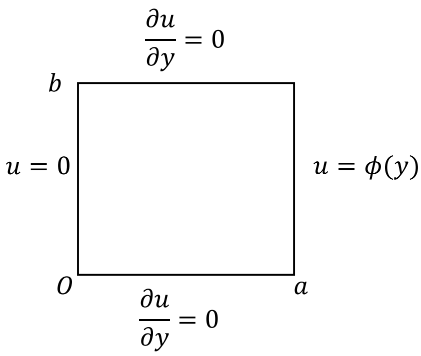
Rta: $$u(x,y) = \frac{B\operatorname{senh}\left(\frac{\pi(b-y)}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{\pi b}{a}\right)} + \frac{8A3^2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{senh}\left(\frac{(2n+1)\pi(a-x)}{b}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi y}{b}\right)}{(2n+1)^3\operatorname{senh}\left(\frac{(2n+1)\pi a}{b}\right)}$$

3. Sobre una placa rectangular se tiene una distribución de temperaturas en estado estacionario así: $u = 0$ sobre la cara izquierda; $u = \phi(y)$ sobre la cara derecha. El flujo de temperaturas es nulo en las caras restantes. Hallar $u(x,y)$

Rta: $$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

con

$$C_n = \frac{2}{b\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}\int_0^b \phi(y)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy$$



4. Resolver el problema anterior para el caso en que $u(0,y) = A; u(a,y) = y + A$.

Indicación: Tome $v = u - A$ y plantee para v un problema similar al propuesto anteriormente.

Rta: $u(x,y) = A + v(x,y)$ donde $v(x,y)$ es la solución del problema anterior considerando $\phi(y) = y$.