Universidad Nacional de San Juan

Facultad de Ingeniería

MATEMÁTICA APLICADA

Ingeniería Mecánica
Ingeniería Electromecánica

Equipo de Cátedra

Profesor Titular	Dr. Javier Gimenez
Jefe de Trabajos Prácticos	Dr. Emanuel Tello

AÑO 2023

Primer semana de Clases

TRANSFORMADA DE LAPLACE

INTRODUCCIÓN

En los modelos matemáticos lineales para sistemas físicos tales como un sistema masa/resorte o un circuito eléctrico en serie, el miembro del lado derecho o entrada, de las ecuaciones diferenciales es una función forzada, y puede representar a una fuerza externa $f(t)$ o a un voltaje aplicado $E(t)$

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + Kx = f(t) \qquad\qquad L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = E(t)$$

En Cálculo II resolvimos problemas en que las funciones $f(t)\ y\ E(t)$ eran continuas. Sin embargo, no es raro encontrarse con funciones continuas por tramos; por ejemplo, el voltaje aplicado a un circuito podría ser el que se muestran en la Fig. 1. Es difícil, pero no imposible, resolver la ecuación diferencial que describe el circuito en este caso.

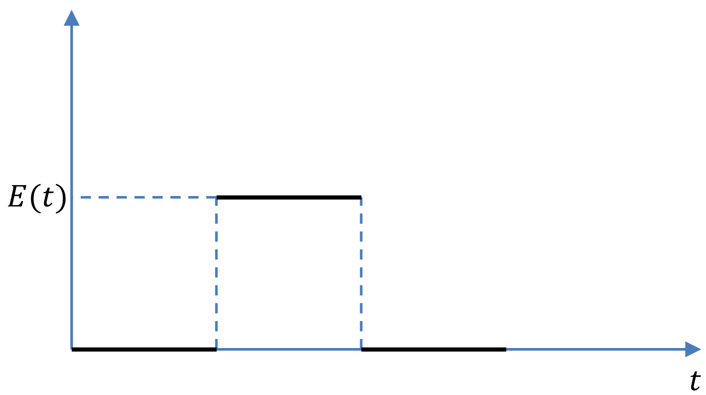


Figura 1

La transformada de Laplace es una valiosa ***herramienta matemática*** que permite resolver problemas como el anterior. En general, La transformada de Laplace transforman una función en otra función, al igual que la diferenciación y la integración. Antes de definirla, recordemos algunos conceptos vistos en Cálculo I y II.

Propiedades

- La diferenciación y la integración gozan de la propiedad de linealidad, es decir, dadas dos funciones $f(t)$ y $g(t)$, y dos constantes α y β cualesquiera, se cumple:

$$\frac{d}{dt}(\alpha\, f(t)+\beta\, g(t))=\alpha\frac{d}{dt}f(t)+\beta\frac{d}{dt}g(t)$$

$$\int(\alpha\, f(t)+\beta\, g(t))\,dt=\alpha\int f(t)\,dt+\beta\int g(t)dt$$

  siempre y cuando exista cada derivada e integral.

- Si $f(x,y)$ una función de dos variables, entonces la integral definida respecto de una variable produce una función de otra variable. Por ejemplo

$$\int_0^1 2xy^2dx=x^2y^2\Big|_0^1=y^2$$

- Análogamente, la integral de una función $f(t)$ de una variable t donde figura una constante m, por ejemplo

$$\int_0^1 e^{mt}dt=\frac{1}{m}e^{mt}\Big|_0^1=\frac{1}{m}e^m-\frac{1}{m}$$

  El resultado es una función que depende del valor de m.

- La integral impropia se define mediante un límite como

$$\int_0^\infty K(s,t)f(t)dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b K(s,t)f(t)dt$$

  De allí se deduce que si el límite existe la integral existe y se dice que es convergente. Por el contrario, si el límite no existe se dice que la integral no existe y que es divergente. En el caso que existe el límite, la integral está definida para ciertos valores de s. Por ejemplo

$$\int_0^\infty e^{-st}dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}dt=\lim_{b\to\infty}\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^b=\underbrace{\lim_{b\to\infty}\frac{e^{-sb}}{-s}}_{existe\ s>0}-\frac{1}{-s}$$

  El límite de la integral existe solamente para valores de $s>0$, pues la exponencial de exponente negativo pasa al denominador, y para b tendiendo a infinito el resultado del cociente se hace cero, o sea

$$\lim_{b\to\infty}\frac{e^{-sb}}{-s}=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{-se^{sb}}=0\quad \text{para}\quad s>0$$

Por lo tanto

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} \qquad \text{para } s > 0$$

DEFINICIÓN DE TRANSFORMADA DE LAPLACE

Dada una función $f(t)$ definida para valores de $t \geq 0$, se define la Transformada de Laplace como

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

siempre que la integral converja. El resultado es una función de la variable real s

<u>NOTACIÓN</u>

La Transformada de la Laplace se simboliza con la letra cursiva $\mathcal{L}$. Se utiliza letras minúsculas para denotar la funciones de "t" y con mayúscula la transformada correspondiente.

$$f(t) \quad \longrightarrow \quad F(s) = \mathcal{L}(f(t))$$

$$g(t) \quad \longrightarrow \quad G(s) = \mathcal{L}(g(t))$$

Observaciones

Dada $f(t)$, su transformada $F(s)$ es una función del parámetro s, el cual es una variable matemática sin interpretación física.

Ejemplos

- Hallar la transformada de $f(t) = 1$

$$\mathcal{L}(1) = \int_0^{\infty} e^{-st} 1 dt = -\left.\frac{e^{-st}}{s}\right|_0^{\infty} = \underbrace{\lim_{t \to \infty} \frac{e^{-st}}{s}}_{\substack{=0 \\ para\ s>0}} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s} \qquad \text{para } \ s > 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}}}$$

- Hallar la transformada de $f(t) = e^{at}$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt = -\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{s-a} \quad \text{para} \quad s > a$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}}}$$

Con un razonamiento análogo al anterior la integral existe siempre que $s > a$, así se asegura que el límite para $t \to \infty$ es cero.

Veamos ahora qué condiciones debe cumplir una función $f(t)$ para que podamos calcular su transformada $F(s)$.

Función Continua por partes o Seccionalmente Continua

Una función es continua por partes o seccionalmente continua en un intervalo $[a, b]$ si es continua en todos los puntos del intervalo excepto en un número finito de puntos, donde debe ser discontinua de salto finito, esto es, debe existir el límite por derecha e izquierda.

Una función es continua por partes o seccionalmente continua en el intervalo $[0, \infty)$ si es continua por partes en todos los intervalos $[a, b]$ contenidos en $[0, \infty)$.

Ejemplos de funciones continuas por partes

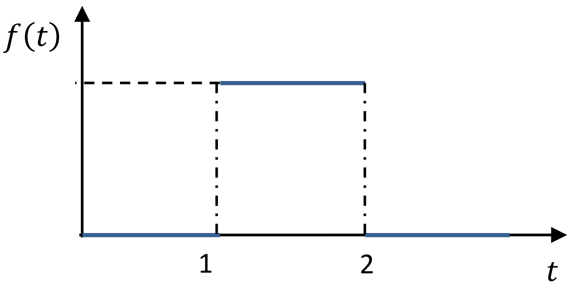


Figura 1

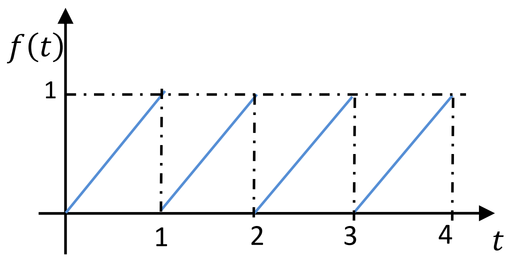


Figura 2

Ejemplo de función que no es continua por partes

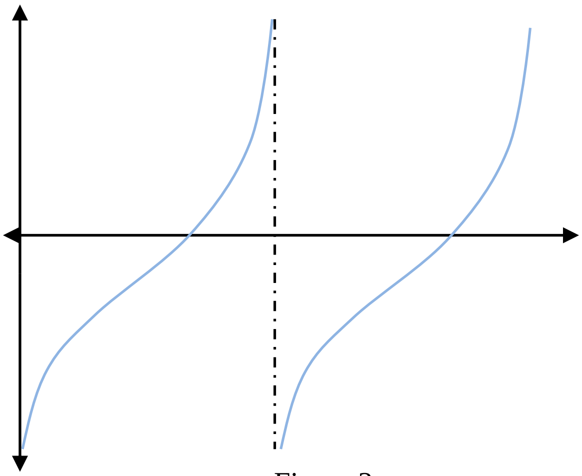


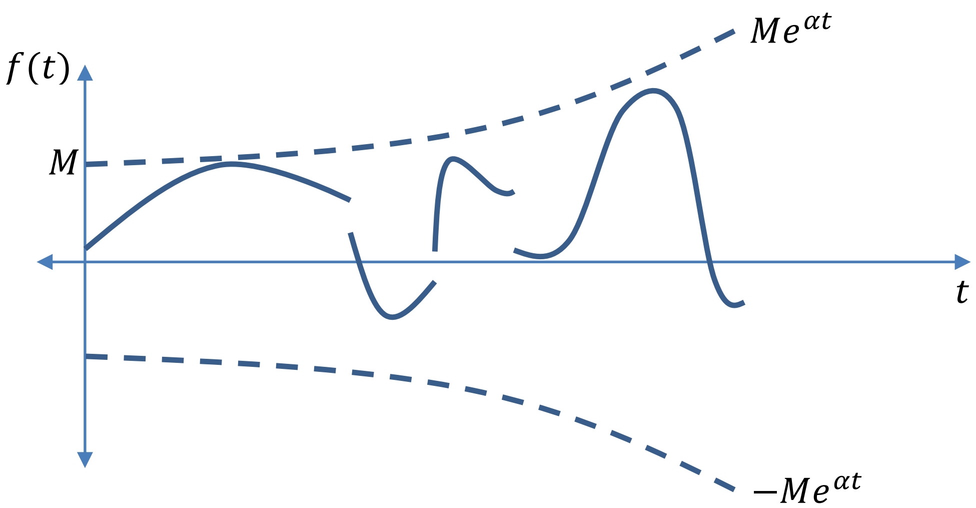
Figura 3

En las Fig. 1 y 2 las funciones son continuas por partes, ya que tienen discontinuidades en un número finito de puntos (Fig. 1 en los puntos 1 y 2; y Fig. 2 en los puntos 1, 2, 3 y 4) presentando en todos los casos discontinuidades de salto finito. Mientras que en la Fig. 3 también se observa una cantidad finita de discontinuidades, pero el salto es infinito, y por lo tanto la función no es continua por parte.

Función de Orden Exponencial

Una función $f(t)$ es de orden exponencial α si y solo si existen $\alpha \geq 0$ y $M > 0$ tales que

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t} \qquad \forall t \geq 0$$



Ejemplos

- $f(t) = e^{at}$ es de orden exponencial $\alpha = a$ pues considerando $M = 1$ se cumple la definición.
- $f(t) = \text{sen}(at)$ Se sabe que la función $-1 \leq \text{sen}(at) \leq 1$ o sea que $|sen(at)| \leq 1$ luego se puede expresar que $|\text{sen}(at)| \leq M \underbrace{e^{0t}}_{1}$, $M \geq 1$ esto indica que la función $\text{sen}(at)$ es de orden exponencial $\alpha = 0$
- $f(t) = e^{t^2}$ No existe ningún valor de α para el cual $\left|e^{t^2}\right| < Me^{\alpha t}$. Esto se debe a que la función cuadrática en el exponente crece más rápido que αt desde un cierto valor de t en adelante (Figura 4), luego esta función no es de orden exponencial.

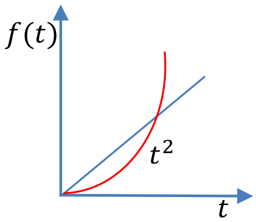


Figura 4

CONDICIÓN DE SUFICIENCIA PARA LA EXISTENCIA DE LA TRANSFORMADA

Si $f(t)$ es continua por partes en el intervalo $[0, \infty)$ y de orden exponencial α entonces existe su Transformada de Laplace $F(s)$ para todo $s > \alpha$

La demostración se basa en la siguiente expresión:

$$\left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt\right| \leq \int_0^\infty e^{-st}|f(t)|dt \leq M \int_0^\infty e^{-st} e^{\alpha t}\, dt = M \int_0^\infty e^{-t(s-\alpha)}\, dt$$

Luego, siempre que $s > \alpha$, resulta

$$|F(s)| \leq \frac{M}{s - \alpha} < \infty$$

Además, tomando límite para $s \rightarrow \infty$ resulta el siguiente resultado

Si $f(t)$ es continua por partes y de orden exponencial y su Transformada es $F(s)$ entonces se cumple que

$$\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$$

La condición de existencia es suficiente pero no necesaria. Esto es, puede que la función no sea continua por partes o seccionalmente continua, y sin embargo exista la transformada. Un ejemplo de ello es la función $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, la cual no es de orden exponencial y presenta una discontinuidad de salto infinito, pero sin embargo existe su Transformada de Laplace

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \qquad \text{para } s > 0$$

La resolución de la integral requiere el cambio de variable $t = \frac{x^2}{s}$.

PROPIEDADES

Propiedad de Linealidad

Como la transformada está definida mediante una integral hereda la propiedad de linealidad de las integrales, esto es:

$$\boxed{\mathcal{L}\big(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\big) = c_1 \mathcal{L}\big(f_1(t)\big) + c_2 \mathcal{L}\big(f_2(t)\big)}$$

Ejemplo:

Hallar la Transformada de $f(t) = 2 + 3e^{at}$

$$\mathcal{L}(2 + 3e^{at}) = 2\mathcal{L}(1) + 3\mathcal{L}(e^{at})$$

$$\mathcal{L}(2 + 3e^{at}) = 2\frac{1}{s} + 3\frac{1}{s-a}$$

Propiedad de multiplicar por t^n

Sea la función $f(t)$ con transformada de Laplace $F(s)$, entonces

$$\boxed{\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)}$$

Demostración

Comencemos demostrando para $n = 1$. Como $f(t)$ admite transformada se tiene que

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st}\, dt$$

Si se deriva a ambos miembros respecto de la variable s, la derivada puede ingresar dentro de la integral por la regla integral de Leibniz resultando

$$F'(s) = \int_0^{\infty} f(t) \frac{d}{ds}(\, e^{-st})\, dt = \int_0^{\infty} f(t)(-t)\, e^{-st}\, dt = -\underbrace{\int_0^{\infty} tf(t)\, e^{-st}\, dt}_{\substack{\mathcal{L}(tf(t)) \\ \text{(por definición)}}}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}(t(f(t))) = -\frac{d}{ds}F(s)$$

Aplicando secuencialmente este procedimiento resulta la propiedad mencionada.

Ejemplos:

- Hallar la transformada $\mathcal{L}(t)$

  Se puede considerar a $t = t.\underbrace{1}_{f(t)}$ y como ya sabemos la transformada de 1

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s} = F(s)$$

  aplicando la propiedad de la multiplicación por t se tiene

$$\mathcal{L}(t.1) = -\frac{d}{ds}F(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}$$

$$f(t) = t \qquad \Longrightarrow \qquad F(s) = \frac{1}{s^2}$$

- Hallar la transformada de $f(t) = t^2$

Se puede considerar para aplicar la propiedad de multiplicación por t de la siguiente forma

$$\mathcal{L}(t^2) = \mathcal{L}\left(t.\underbrace{t}_{f(t)}\right) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(t) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2}\right) = -\left(-\frac{2}{s^3}\right) = \frac{2}{s^3}$$

Quedando

$$f(t) = t^2 \qquad \Longrightarrow \qquad F(s) = \frac{2}{s^3}$$

Generalizando

$$\boxed{\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}}$$

Propiedad de Traslación en s

Si $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ entonces

$$\boxed{\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = F(s-a)}$$

Demostración

Aplacando la definición de Transformada se tiene:

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = \int_0^\infty e^{at}f(t)\, e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}f(t)\, dt$$

Aplicando la propiedad de producto de potencia de igual base, que indica sumar los exponentes y además por conveniencia se extrae $-t$ como factor común , quedando la expresión de la integral de la siguiente manera

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = \int_0^\infty e^{-t\overbrace{(s-a)}^{u}}f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-tu}f(t)\, dt = F(u) = F(s-a)$$

donde $F(s)$ es la transformada de $f(t)$.

Nota: $F(s-a) \neq F(s) - a$ (ver Figura 5)

$F(s-a)$ implica una traslación sobre el eje horizontal de la variable s

$F(s) - a$ implica una traslación sobre el eje vertical

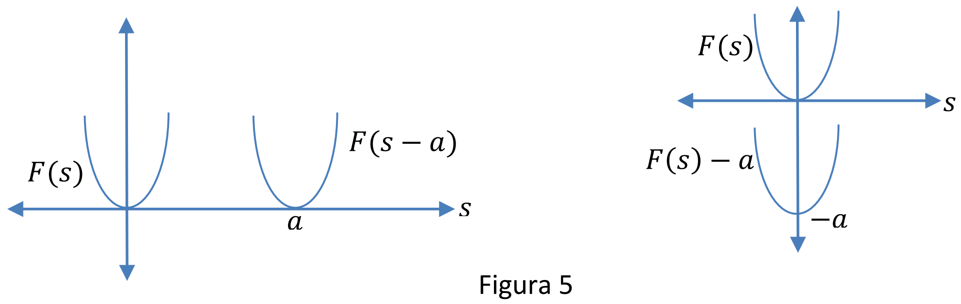


Figura 5

Ejemplos:

Hallar la transformada de te^{2t}

Esta transformada se puede realizar de dos maneras diferentes:

a) Aplicando la propiedad de multiplicación en t, se tiene que la función que acompaña es $f(t) = e^{2t}$ luego su transformada es

$$f(t) = e^{2t} \qquad \Longrightarrow \qquad F(s) = \frac{1}{s-2}$$

La multiplicación de $f(t)$ por t produce en la transformada la derivación de la transformada de $f(t)$, o sea de $F(s)$, luego

$$\mathcal{L}(te^{2t}) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-2}\right) = \frac{1}{(s-2)^2} \qquad (*)$$

b) Aplicando la propiedad de traslación en s se procede de la siguiente manera

Como la propiedad dice que si $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ entonces

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = F(s-a)$$

En este ejemplo $f(t) = t,$ luego su transformada es

$$f(t) = t \qquad \Longrightarrow \qquad F(s) = \frac{1}{s^2}$$

Luego la traslación se aplica sobre esta transformada, recordar donde aparece s se reemplaza por $s-a$, luego la transformada final queda

$$\mathcal{L}(te^{2t}) = \frac{1}{(s-2)^2} \qquad\qquad (**)$$

Es claro que $(*)$ y $(**)$ son iguales. Es decir, cualquiera sea la propiedad que se aplique la transformada dará el mismo resultado.

Propiedad: Transformada de la Derivada

Si $f(t)$ es de orden exponencial α entonces para $s > \alpha$ se tiene que

$$\boxed{\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0)}$$

Demostración

Siguiendo la definición de Transformada se tiene:

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}\,dt \qquad (a)$$

Aplicando el método de integración por partes, eligiendo

$$u = e^{-st} \qquad\qquad du = -se^{-st}dt$$

$$dv = f'(t)dt \qquad\qquad v = f(t)$$

Luego la integral (a) queda

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}\,dt \;= uv|_0^\infty - \int_0^\infty vdu$$

$$\mathcal{L}(f'(t)) = f(t)e^{-st}|_0^\infty - \int_0^\infty f(t).(-se^{-st})dt$$

Aplicando la Regla de Barrow y resolviendo la integral del segundo término se tiene:

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st} - f(0).\underbrace{e^{-s.0}}_{1} + s\underbrace{\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt}_{F(s)}$$

Recordando que $f(t)$ es de orden exponencial α se cumple $|f(t)| < Me^{\alpha t}$, reemplazando en el límite queda

$$\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st} \leq \lim_{t\to\infty} |f(t)e^{-st}| \leq \lim_{t\to\infty} Me^{\alpha t}e^{-st} = M \lim_{t\to\infty} e^{-t(s-\alpha)} = 0$$

siempre que $s > \alpha$. Luego la transformada de la derivada resulta lo que queríamos demostrar

$$\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0)$$

Cálculo de la derivada segunda $\mathcal{L}(f''(t))$

Se sabe que:

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0)$$

Si se realiza la siguiente sustitución:

$$g(t) = f'(t) \qquad \Longrightarrow \qquad G(s) = \mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0) \quad (1)$$

Derivando la función $g(t)$ y aplicando la propiedad de la Transformada de la derivada

$$g'(t) = f''(t) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{L}\big(g'(t)\big) = sG(s) - g(0) \qquad\qquad (2)$$

Reemplazando en términos de $f(t)$ se tiene

$$\mathcal{L}\big(f''(t)\big) = \mathcal{L}\big(g'(t)\big) \underbrace{=}_{\text{Por }(2)} sG(s) - \underbrace{g(0)}_{f'(0)} \underbrace{=}_{\text{por }(1)} s\big(s.F(s) - f(0)\big) - f'(0)$$

Resumiendo:

$$\boxed{\mathcal{L}\big(f''(t)\big) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)}$$

Generalizando:

$$\boxed{\mathcal{L}(f^n(t)) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) \ldots - sf^{n-2}(0) - f^{n-1}(0)}$$

Observaciones:

- El exponente $n - i$ de f indica orden de derivación. Por ejemplo $f^{n-2}(0)$ indica derivada de orden $n-2$ de f evaluada en $t = 0$.
- La transformada de la derivada de orden "n" se transforma en un polinomio en "s" de grado "n" donde los coeficientes son las condiciones iniciales excepto en s^n cuyo coeficiente es la Transformada de $f(t)$.

Ejemplos

1. Hallar la transformada de $f(t) = t^2$ aplicando la propiedad de la derivada.

   Como $f'(t) = 2t$, aplicando la propiedad de la derivada, y recordando que se quiere calcular F(s) se tiene

$$\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0)$$

   Reemplazando

$$\mathcal{L}(2t) = sF(s) - 0$$

   Despejando $F(s)$ se tiene

$$F(s) = \frac{1}{s} 2\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s} 2 \frac{1}{s^2}$$

   Luego se tiene al igual que antes

$$\mathcal{L}(t^2) = \frac{2}{s^3}$$

2. Hallar la Transformada de $f(t) = \text{sen}(at)$ aplicando la propiedad de la derivada segunda

$$f(t) = \text{sen}(at) \quad \Longrightarrow \quad f'(t) = a.\cos(at) \quad \Longrightarrow \quad f''(t) = -a^2\text{sen}(at)$$

$$\underbrace{\mathcal{L}(f''(t))}_{-a^2\mathcal{L}(\text{sen}(at))} = s^2\mathcal{L}(f(t)) - s \underbrace{f(0)}_{\text{sen}(0)=0} - \underbrace{f'(0)}_{\text{a.cos}(0)=a}$$

Ordenando la expresión resulta

$$-a^2\mathcal{L}\big(\text{sen}(at)\big) = s^2\mathcal{L}\big(\text{sen}(at)\big) - a$$

Despejando $\mathcal{L}\big(\text{sen}(at)\big)$ se tiene

$$\boxed{\mathcal{L}\big(\text{sen}(at)\big) = \frac{a}{s^2 + a^2}}$$

Propiedad: Transformada de la división por t

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^\infty F(u)du$$

donde $F(u) = \mathcal{L}(f(t))$

Consideremos la función $g(t)$ dada por

$$\frac{f(t)}{t} = g(t) \quad \Longrightarrow \quad f(t) = t.g(t) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(t.g(t))$$

Aplicando la propiedad de la multiplicación por t

$$F(s) = -\frac{d}{ds}G(s) = -G'(s)$$

Integrando miembro a miembro entre a y s se tiene

$$\int_a^s -G'(u)du = \int_a^s F(u)\,du$$

$$G(s) - G(a) = -\int_a^s F(u)\,du$$

$$G(s) - \lim_{a\to\infty} G(a) = -\lim_{a\to\infty}\int_a^s F(u)\,du = -\int_\infty^s F(u)\,du = \int_s^\infty F(u)\,du$$

Se demostró que $\lim\limits_{a\to\infty} G(a) = 0$. Luego:

$$\boxed{G(s) = \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^\infty F(u)\,du}$$

Ejemplo:

Hallar la transformada de $\mathcal{L}\left(\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\right)$

Si se aplica la propiedad de la división por t, en este ejemplo

$$f(t) = \operatorname{sen}(3t) \qquad \Longrightarrow \qquad F(s) = \frac{3}{s^2+9}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\right) = \int_s^\infty \frac{1}{u^2+1}\,du = \operatorname{arctg}(u)\big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(s)$$

Propiedad: Transformada de la integral

Sea $f(t)$ cuya transformada es $F(s)$ entonces se cumple :

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right) = \frac{F(s)}{s}$$

En efecto: si

$$g(t) = \int_0^t f(u)du$$

Entonces $g'(t) = f(t)$, y por ende

$$F(s) = \mathcal{L}\big(g'(t)\big) = sG(s) - \underbrace{g(0)}_{\int_0^0 f(u)du=0}$$

Despejando $G(s) = \mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right)$ resulta

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right) = \frac{F(s)}{s}$$

Función Escalón (Heaviside)

En ingeniería es común encontrar funciones "desactivadas" o "activadas" en determinados intervalos. Por ejemplo, una fuerza externa que actúa en un sistema mecánico, o un voltaje aplicado a un circuito, se puede activar después de cierto tiempo $t = a$.

Es conveniente definir entonces una función especial que es el número 0 (desactivada) hasta un cierto tiempo $t = a$ y luego el número 1 (activada) después de $t = a$.

Esta función se llama ***Función Escalón Unitaria*** o ***Función de Heaviside*** llamada en honor del polímata inglés Oliver Heaviside (1850-1925)

Definición de Función Escalón Unitario

La Función Escalón Unitario $u(t-a)$ se define como

$$u(t-a) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t > a \quad \text{o} \quad t - a > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < a \quad \text{o} \quad t - a < 0 \end{cases}$$

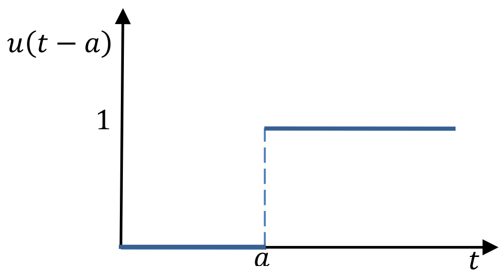


Figura 6

La función escalón también se utiliza para definir funciones continuas por partes como por ejemplo

1. La función Pulso (Figura 7) se define como

$$P_a(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & a < t < b \\ 0 & t > b \end{cases}$$

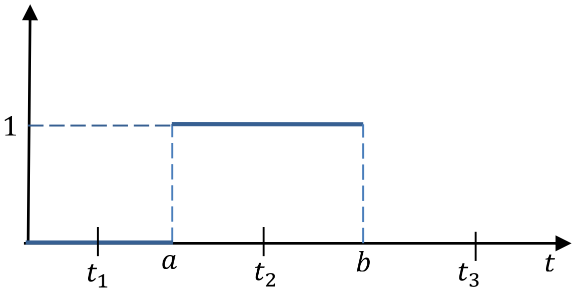


Figura7

La función Pulso de ancho $d = b - a$ se puede escribir en una sola expresión utilizando la función escalón. Como la función escalón activa el valor a partir de un valor de “t” determinado y la desactiva para los valores anteriores a dicho valor de “t” entonces se puede escribir la siguiente expresión:

$$P_d(t) = u(t-a) - u(t-b)$$

Esto se interpreta de la siguiente manera: La función vale cero antes de $t = a$, luego vale 1 para valores de “t” posteriores a $t = a$ por la presencia de $u(t-a)$. Sin embrago, la resta de $u(t-b)$ recién se activa para valores de “t” mayores que $t = b$. Esto es, para los valores de t marcados en la Fig. 7 se cumple

$$f(t_1) = 0 \quad ; \quad f(t_2) = \underbrace{1}_{t_2 > a} \quad ; \quad f(t_3) = 1 - \underbrace{1}_{t_3 > b} = 0$$

2. Tren de pulsos

Sea un tren de pulsos dado por el siguiente gráfico

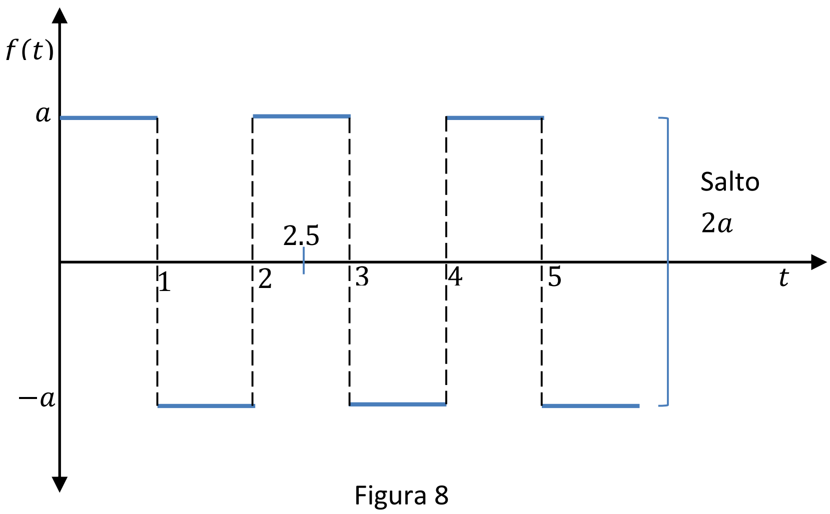


Figura 8

Esta función puede escribirse en forma compacta usando la Función Escalón. Para ello se debe tener en cuenta en cada tramo cuál es el valor que se desea activar y cuál es el que se desactiva. En cada cambio se activará una función escalón y también interviene el salto que se produce entre un escalón y el siguiente

$$f(t) = a - 2a\,u(t-1) + 2a\,u(t-2) - 2a\,u(t-3) + 2a\,u(t-4) - 2a\,u(t-5) + \cdots$$

Es claro que para valores de “t” tal que $0 \leq t \leq 1$ la función vale $f(t) = a$, pero para valores $1 \leq t \leq 2$ la función vale $f(t) = -a$ esto significa que en $t = 1$ la función tiene un salto de longitud $-2a$ porque desciende el pulso. Mientras que para valores $2 \leq t \leq 3$ la función vale nuevamente $f(t) = a$ produciéndose un salto ascendente de longitud $2a$.

La función escalón se usa para activar los cambios de la función en cada intervalo teniendo en cuenta el salto con su signo

Por ejemplo para un valor de $t = 2.5$ siguiendo la definición de $f(t)$ se tiene

$$f(2.5) = a - 2a\,\underbrace{u(2.5-1)}_{1} + 2a\,\underbrace{u(2.5-2)}_{1} - 2a\,\underbrace{u(2.5-3)}_{0} + 2a\,\underbrace{u(2.5-4)}_{0} - 2a\,\underbrace{u(2.5-5)}_{0} + \cdots$$

$$f(2.5) = a - 2a + 2a - 2a.0 + 2a.0 - 2a.0 + \cdots = a$$

Coincide con el gráfico de la Fig. 8

La función $f(t)$ se puede expresar en forma compacta con el símbolo sumatoria, como los términos tienen signo alternado se multiplican por $(-1)^n$ y de esa forma cambian los signos. Los términos pares dentro de la sumatoria son positivos, mientras que los términos impares son negativos, quedando la expresión de la siguiente manera

$$f(t) = a + 2a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u(t-n)$$

3. Función Generalizada

La función escalón se utiliza para definir una función definida por partes en forma compacta. Sea la siguiente función

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & 0 \leq t < a \\ f_2(t) & a < t < b \\ f_3(t) & b < t < c \\ 0 & t > c \end{cases}$$

La gráfica de la función será:

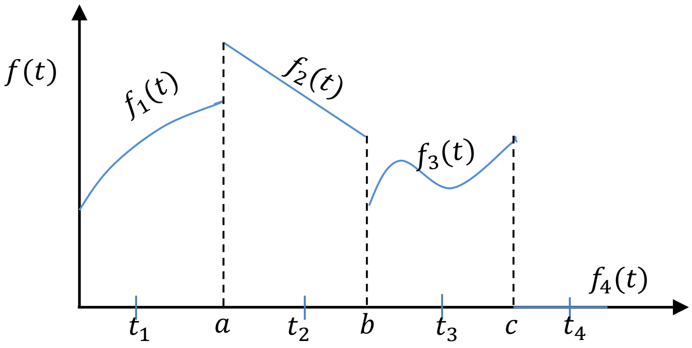


Figura 9

En forma análoga al Tren de pulsos, se usa la función escalón para activar los cambios de la función en cada intervalo, la diferencia que ahora las funciones no son constantes. En cada tramo debe quedar solamente la función que corresponde, para ello se debe tener en cuenta el salto que hay de un intervalo a otro, que está dado por la diferencia entre las funciones consecutivas. Esto es

$$f(t) = f_1(t) + \big(f_2(t) - f_1(t)\big)\, u(t-a) + \big(f_3(t) - f_2(t)\big)\, u(t-b) + \big(f_4(t) - f_3(t)\big)\, u(t-c)$$

Se puede comprobar si está bien definida tomando valores de "t" en cada intervalo para verificar si coincide con el valor que corresponde en la definición original .Por ejemplo

$$f(t_1) = f_1(t_1) + \big(f_2(t_1) - f_1(t_1)\big) \underbrace{u(t_1 - a)}_{\text{es } 0 \text{ por ser } t_1 < a} + \big(f_3(t_1) - f_2(t_1)\big) \underbrace{u(t_1 - b)}_{\text{es } 0 \text{ por ser } t_1 < b} + \big(f_4(t_1) - f_3(t_1)\big) \underbrace{u(t_1 - c)}_{\text{es } 0 \text{ por ser } t_1 < c}$$

$f(t_1) = f_1(t_1)$

$$f(t_2) = f_1(t_2) + \big(f_2(t_2) - f_1(t_2)\big) \underbrace{u(t_2 - a)}_{\text{es } 1 \text{ por ser } t_2 > a} + \big(f_3(t_2) - f_2(t_2)\big) \underbrace{u(t_2 - b)}_{\text{es } 0 \text{ por ser } t_2 < b} + \big(f_4(t_2) - f_3(t_2)\big) \underbrace{u(t_2 - c)}_{\text{es } 0 \text{ por ser } t_2 < c}$$

$$f(t_2) = f_1(t_2) + f_2(t_2) - f_1(t_2) = f_2(t_2)$$

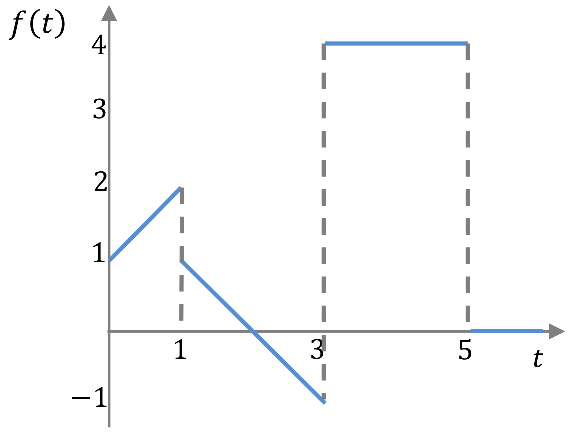
$$\begin{aligned} f(t_3) = f_1(t_3) + \big(f_2(t_3) - f_1(t_3)\big) \quad & \underbrace{u(t_3 - a)}_{\text{es 1 por ser } t_3 > a} \\ + \big(f_3(t_3) - f_2(t_3)\big) \quad & \underbrace{u(t_3 - b)}_{\text{es 1 por ser } t_3 < b} \\ + \big(f_4(t_3) - f_3(t_3)\big) \quad & \underbrace{u(t_3 - c)}_{\text{es 0 por ser } t_3 < c} \end{aligned}$$

$$f(t_3) = f_1(t_3) + f_2(t_3) - f_1(t_3) + f_3(t_3) - f_2(t_3) = f_3(t_3)$$

Ídem para t_4

Ejemplo

Definir en forma generalizada la función continua por partes definida como



$$f(t) = \begin{cases} t+1 & 0 \le t < 1 \\ -t+2 & 1 < t < 3 \\ 4 & 3 < t < 5 \\ 0 & t > 5 \end{cases}$$

$$f(t) = t + 1 + \big(-t + 2 - (t+1)\big)u(t-1) + \big(4 - (-t+2)\big)u(t-3) + \big(0 - (4)\big)u(t-5)$$

Luego por ejemplo para $t = 0.5$ como $u(0.5 - 1) = 0$ por ser $0.5 - 1 < 0$, por definición de la función escalón. Entonces

$$\begin{aligned} f(0.5) = 0.5 + 1 + \big(-0.5 + 2 - (0.5 + 1)\big) \quad & \underbrace{u(0.5 - 1)}_{= 0 \text{ por ser } 0.5 < 1} \\ + \big(4 - (-0.5 + 2)\big) \quad & \underbrace{u(0.5 - 3)}_{= 0 \text{ por ser } 0.5 < 3} \\ + \big(0 - (4)\big) \quad & \underbrace{u(0.5 - 5)}_{= 0 \text{ por ser } 0.5 < 5} \end{aligned}$$

$$f(0.5) = 0.5 + 1 = 1.5$$

$$f(3.5) = 3.5 + 1 + \big(-3.5 + 2 - (3.5 + 1)\big) \quad \underbrace{u(3.5 - 1)}_{= 1 \text{ por ser } 3.5 > 1}$$
$$+ \big(4 - (-3.5 + 2)\big) \quad \underbrace{u(3.5 - 3)}_{= 1 \text{ por ser } 3.5 > 3}$$
$$+ \big(0 - (4)\big) \quad \underbrace{u(3.5 - 5)}_{= 0 \text{ por ser } 0.5 < 5}$$

$$f(3.5) = 3.5 + 1 + \big(-3.5 + 2 - (3.5 + 1)\big) + 4 - (-3.5 + 2) + \big(0 - (4)\big).0$$

$$f(3.5) = 4$$

Propiedad de la Traslación en t

Sea $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ y $a > 0$ entonces

$$\mathcal{L}\big(f(t-a)u(t-a)\big) = e^{-as}F(s)$$

Demostración

Aplicando la definición de transformada se tiene

$$\mathcal{L}\big(f(t-a)u(t-a)\big) = \int_0^\infty f(t-a)u(t-a)e^{-st}\,dt$$

Si se multiplica por "1" la integral no varía, expresado uno como $1 = e^{-as}e^{as}$, sacando la constante e^{-as} fuera de la integral, se obtiene

$$\mathcal{L}\big(f(t-a)u(t-a)\big) = e^{-as}\int_0^\infty f(t-a)u(t-a)e^{as}e^{-st}\,dt$$

$$\mathcal{L}\big(f(t-a)u(t-a)\big) = e^{-as}\int_0^\infty f(t-a)u(t-a)e^{-s(t-a)}\,dt$$

Haciendo una sustitución

$$v = t - a \qquad dv = dt \qquad t = 0 \;\Rightarrow v = -a \qquad t = \infty \;\Rightarrow v = \infty$$

$$\mathcal{L}\big(f(t-a)\,u(t-a)\big) = e^{-as}\int_{-a}^\infty f(v)\,u(v)e^{-sv}\,dv$$

Pero como $u(v) = 0$ para $v < 0$ entonces el límite de la integral va de cero a infinito. Además en el integrando la función escalón $u(v) = 1$ para $0 < v < \infty$, luego la integral queda

$$\mathcal{L}\big(f(t-a)u(t-a)\big) = e^{-as}\underbrace{\int_0^\infty f(v)e^{-sv}\,dv}_{\mathcal{L}(f(t))} = e^{-as}F(s)$$

Entonces se cumple que

$$\mathcal{L}\big(f(t-a)\,u(t-a)\big) = e^{-as}F(s)$$

Observaciones

- El resultado de la transformada es $e^{-as}F(s)$ siendo $F(s)$ la transformada de $f(t)$ sin trasladar la variable "t", y la constante "a" es la constante de la traslación de la variable "t".
- Para poder aplicar la propiedad la función $f(t)$ la variable independiente "t" debe estar trasladada en el mismo valor que la función escalón $u(t-a)$. Si esto no se cumple no se puede aplicar la propiedad. Se deben hacer operaciones permitidas para lograr la traslación de "t" en el valor deseado.

Ejemplos

1. Hallar la transformada de $u(t-a)$

   En este caso la función $f(t) = 1$, y su transformada es $F(s) = \frac{1}{s}$. No es necesario trasladar la variable "t" porque la función es constante y vale siempre igual cualquiera sea el valor de "t". Luego aplicando la propiedad

   $$\mathcal{L}(u(t-a)) = \mathcal{L}(1.u(t-a)) = e^{-as}\frac{1}{s}$$

2. Hallar $\mathcal{L}(u(t))$

   Este es un caso particular del ejemplo 1 para el valor de $a = 0$.

   $$\mathcal{L}(u(t)) = e^{0s}\frac{1}{s} = \frac{1}{s}$$

   Note que $\mathcal{L}(u(t))$ es igual a $\mathcal{L}(1)$, esto se debe a que las funciones $u(t)$ y $f(t) = 1$ son iguales en el dominio de integración de la definición de la Transformada de Laplace.

3. Hallar $\mathcal{L}(t\,u(t-2))$

   Para aplicar la propiedad la función que acompaña debe tener la misma traslación que la Función Escalón. En este caso debería aparecer ser $f(t-2)$. La expresión que acompaña a $u(t-2)$ es t. Luego aplicando operaciones que no alteren su valor se puede expresar

   $$t = t\underbrace{-2+2}_{0} = (t-2)+2 = f(t-2)$$

   donde

   $$f(t) = t+2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(t-2) = (t-2)+2 = t$$

   Logrando de este modo escribir como $f(t-2)$ a t (expresión que acompaña a $u(t-2)$).

   En resumen:

   $$t\,u(t-2) = f(t-2)u(t-2) \qquad \text{con} \qquad f(t) = t+2$$

La propiedad dice:

$$\mathcal{L}\big(f(t-a)u(t-a)\big) = e^{-as}F(s)$$

Pero en este caso la función sin trasladar es:

$$f(t) = t+2 \qquad \Longrightarrow \qquad F(s) = \frac{1}{s^2}+\frac{2}{s}$$

Reemplazando en la propiedad queda:

$$\mathcal{L}\big(tu(t-2)\big) = \mathcal{L}\Big(\big((t-2)+2\big)\,u(t-2)\Big) = e^{-2s}\mathcal{L}(t+2)$$

$$= e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s}\right)$$

4. Hallar la transformada de $\cos(t)u(t-\pi)$

En este caso la función que acompaña a la Función Escalón es $\cos(t)$ y la traslación es en $a=\pi$. Luego para poder aplicar la propiedad de la traslación en t, se debe expresar la función que acompaña al Escalón en $t-\pi$, para ello se recurre a las relaciones trigonométricas del coseno de la suma de dos ángulos. En efecto

$$\cos(t) = \cos\left(\underbrace{t-\pi}_{\alpha}+\pi\right) = \cos(\alpha)\cos(\pi) - sen(\alpha)sen(\pi) = -\cos(\alpha)$$

Luego

$$\cos(t) = -\cos(t-\pi) = f(t-\pi) \qquad \text{con} \qquad f(t) = -\cos(t)$$

Por lo que

$$F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big) = -\frac{s}{s^2+1}$$

Aplicando la propiedad de la traslación en t

$$\mathcal{L}(\cos(t)u(t-\pi)) = -e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}$$

Función Delta de Dirac

La delta de Dirac o función delta de Dirac es una distribución o función generalizada introducida por primera vez por el físico británico Paul Dirac, como distribución, define un funcional en forma de integral sobre un cierto espacio de funciones.

En física, la delta de Dirac puede representar la distribución de densidad de una masa unidad concentrada en un punto a.

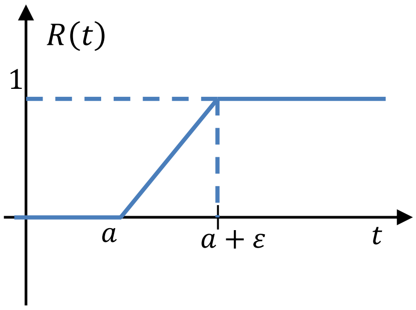
Los sistemas mecánicos suelen ser afectados por una fuerza externa (o fuerza electromotriz en un circuito eléctrico) de gran magnitud que actúa sólo por un periodo muy corto. En ocasiones se denomina también función de impulso.

Se puede decir que la función Delta de Dirac está definida en un punto donde su magnitud es muy grande y en el resto de los puntos es nula

Trataremos de definir intuitivamente la función delta, para ello consideremos la función rampa y la función escalón

Función Rampa

La función rampa está definida como:



$$R(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \frac{1}{\varepsilon}(t-a) & a < t < a+\varepsilon \\ 1 & t > a+\varepsilon \end{cases}$$

Se puede observar que a medida que $\varepsilon \to 0$ la base de la rampa disminuye y la pendiente de la recta $m = 1/\varepsilon$ aumenta considerablemente a tal punto que $m \to \infty$ cuando $\varepsilon \to 0$, transformándose la función rampa en la función escalón como la que muestra la Fig. 11.

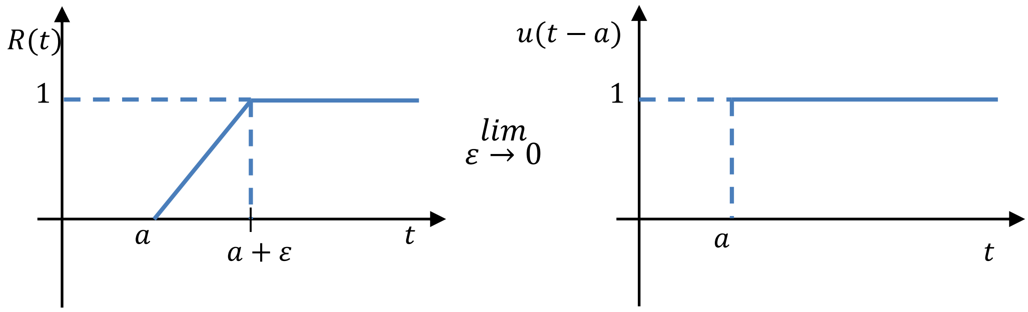
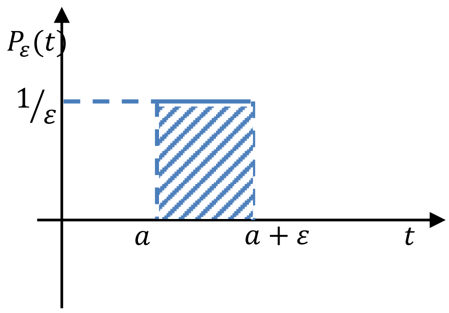


Figura 11

Función Pulso

La función Pulso está definida como



$$P_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \frac{1}{\varepsilon} & a < t < a+\varepsilon \\ 0 & t > a+\varepsilon \end{cases}$$

La función $P_\varepsilon(t)$ es un pulso de ancho ε y altura $\frac{1}{\varepsilon}$. El área encerrada por dicho pulso es igual a 1

A medida que la base disminuye, o sea $\varepsilon \to 0$, la altura del pulso $h = \frac{1}{\varepsilon}$ aumenta manteniendo el área. En el límite cuando $\varepsilon \to 0$ la altura es infinita pero el área sigue siendo uno, con lo cual se puede definir una nueva función que es la función delta de Dirac, la cual en un punto tiende a infinito y en el resto vale cero, con la propiedad que su integral es igual a uno. Esto se diagrama en la Fig. 12.

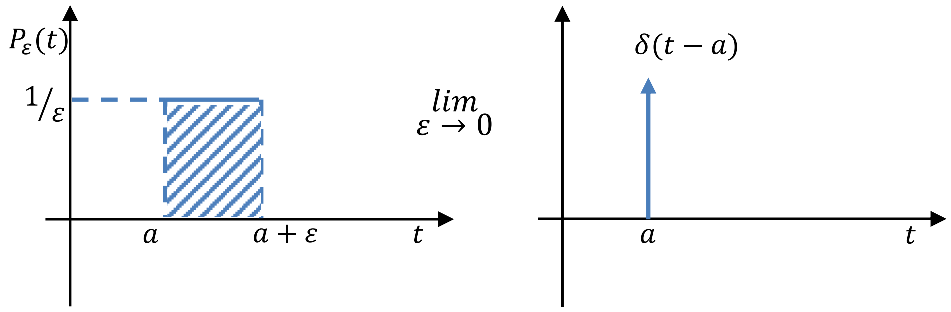


Figura 12

De esta manera se puede definir

Definición de la función Delta de Dirac

Se define la función Delta de Dirac como

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & t = a \\ 0 & t \neq a \end{cases}$$

También se define como aquella función que cumple

$$\int_c^d \delta(t-a)\ dt = 1 \quad \text{siempre que} \quad c < a < d$$

Propiedades

1. Relación entre la función rampa y la función pulso

   Si se deriva la función rampa, se puede observar en la Fig. 13 que la función derivada de la función rampa coincide con la función pulso. En efecto: la derivada de cero es cero, lo cual corresponde para los valores de t anteriores a $t = a$, y la derivada de la recta es la pendiente de dicha recta la cual es constante y vale $1/\varepsilon$ que coincide con la altura del pulso. Análogamente para valores de $t > a + \varepsilon$ la función es constante y su derivada vale cero al igual que el pulso de ancho ε.

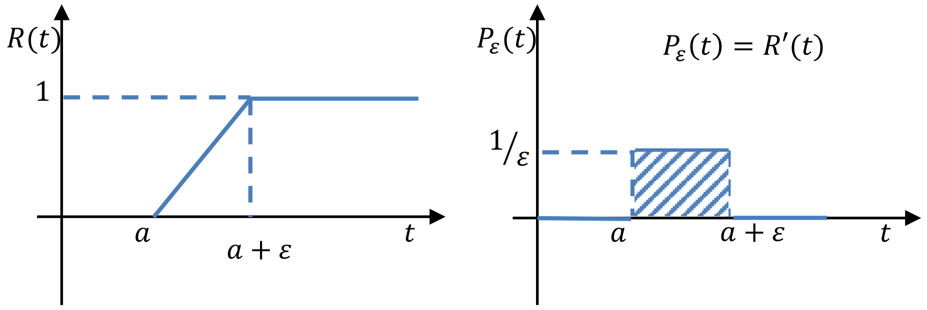


Figura 13

2. Relación entre la Función Escalón y la Función Delta de Dirac.
   Se puede observar en la Fig. 14 que la derivada de la función escalón es la función delta. En efecto: al derivar las funciones constantes del escalón dan cero excepto en el punto $t = a$ que la pendiente es infinito

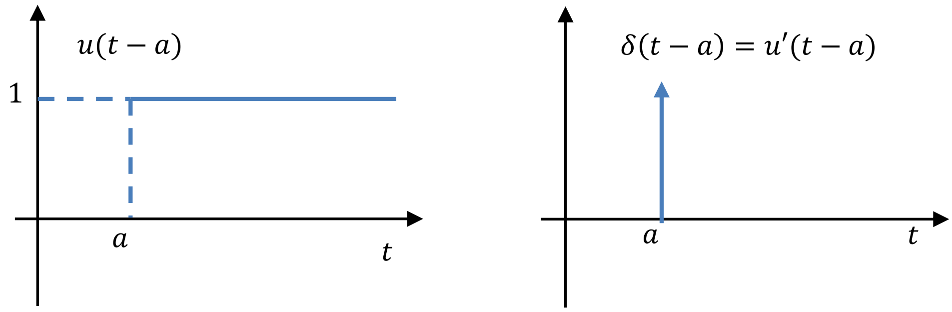


Figura 14

$$\delta(t-a) = u'(t-a)$$

3. Si $\phi(t)$ es una función arbitraria, entonces

$$\phi(t).\,\delta(t-a) = \phi(a).$$

4. Integral de una función arbitraria $\phi(t)$ por la función Delta:

$$\int_c^d \delta(t-a)\phi(t)\ dt = \phi(a)$$

Transformada de la función Delta

La transformada de la función Delta es

$$\mathcal{L}\big(\delta(t-a)\big) = \ e^{-as}$$

Demostración

Siguiendo la definición y por Propiedad 4

$$\mathcal{L}\big(\delta(t-a)\big) = \int_0^\infty \delta(t-a)\,\underbrace{e^{-st}}_{\phi(t)}\,dt = \phi(a)$$

$$\mathcal{L}\big(\delta(t-a)\big) = e^{-as}$$

Caso particular para $a = 0$

$$\mathcal{L}\big(\delta(t)\big) = 1$$

Si existe $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ entonces se cumplen

Teorema del Valor Inicial

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

Demostración

Teniendo en cuenta la definición de la transformada de la derivada y la propiedad de la derivada se tiene la siguiente igualdad

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = sF(s) - f(0)$$

Tomando límite a ambos miembros para "s" tendiendo a infinito

$$\underbrace{\lim_{s\to\infty} \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt}_{0} \quad = \lim_{s\to\infty} sF(s) - f(0)$$

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0)$$

$$\boxed{\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)}$$

Teorema del Valor Final

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Demostración

Teniendo en cuenta la definición de la transformada de la derivada y la propiedad de la derivada se tiene la siguiente igualdad

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = sF(s) - f(0)$$

$$\lim_{s\to 0} \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt \;=\; \lim_{s\to 0} sF(s) - f(0)$$

$$\int_0^\infty f'(t)dt = \lim_{s\to 0} sF(s) - f(0)$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) - f(0) = \lim_{s\to 0} sF(s) - f(0)$$

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)}$$