Universidad Nacional de San Juan

Facultad de Ingeniería

MATEMÁTICA APLICADA

Ingeniería Mecánica
Ingeniería Electromecánica

Equipo de Cátedra

Profesor Titular	Dr. Javier Gimenez
Jefe de Trabajos Prácticos	Dr. Emanuel Tello

AÑO 2023

Segunda semana de Clases

ANTITRANSFORMADA

INTRODUCCIÓN

Ahora estudiaremos el problema inverso de la Transformada de Laplace. Esto es, conocida la transformada de una función, el problema es como hallar la función de "t" correspondiente, y tener la seguridad de que es única. Para ello previamente definimos el concepto de Función Nula.

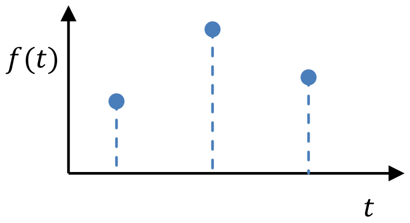
Función Nula

Se llama función Nula y se simboliza como $\mathcal{N}(t)$ aquella que para todo "t" cumple

$$\int_0^t \mathcal{N}(x)\,dx = 0$$

Ejemplo:

- Las funciones discretas son funciones Nulas.



- En general toda función que vale cero para todo "t" excepto para un número finito de puntos, es una función nula.

La Transformada de Laplace de una función Nula es cero

$$\mathcal{L}(\mathcal{N}(t)) = 0$$

Definición de la Transformada Inversa de Laplace

Si $F(s)$ es la transformada de Laplace de una función $f(t)$, es decir

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$$

entonces $f(t)$ es la transformada inversa de Laplace de $F(s)$ y se simboliza

$$\mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big) = f(t)$$

donde el operador $\mathcal{L}^{-1}$ se denomina Transformada Inversa de Laplace.

Ejemplo:

$$\mathcal{L}(e^{-3t}) = \frac{1}{s+3}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right) = e^{-3t}$$

También se cumple por lo dicho anteriormente:

$$\mathcal{L}\big(f(t)\big) = F(s) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big) = f(t)$$

$$\mathcal{L}(f(t) + \mathcal{N}(t)) = F(s) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big) = f(t) + \mathcal{N}(t)$$

Luego la presencia de las funciones Nulas evita la unicidad de la transformada inversa.

Como las funciones Nulas son pocos usuales, carecen de interés físico, no se tendrán en cuenta al buscar la transformada inversa, y de esta manera se garantiza la unicidad, esto está expresado en el siguiente teorema

Teorema de Lerch

Si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son funciones Continuas por partes y de orden exponencial α tales que $\mathcal{L}\big(f_1(t)\big) = \mathcal{L}\big(f_2(t)\big)$ entonces $f_1(t) = f_2(t) + \mathcal{N}(t)$ siendo $\mathcal{N}(t)$ una función Nula.

MÉTODOS DE CÁLCULO

Estudiaremos tres métodos para calcular la transformada inversa y estos son

1. Cálculo directo (mediante el uso de Tabla)
2. Método de Convolución
3. Método de Fracciones Simples

Cálculo directo

Esto es como cuando integramos, sabiendo derivar se puede obtener la integral. En este caso si se conocen las transformadas de las funciones mediante el uso de la Tabla se aplican las propiedades y así se obtiene la función $f(t)$. Para ello hay que recurrir a la Tabla y leerla en forma inversa de derecha a izquierda.

Ejemplos

$a) \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1 = u(t)$

$b) \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) \underset{\text{prop } 10}{=} t$

$c)\quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3}\right) \underset{\text{prop } 10}{=} \frac{t^2}{2}$

Generalizando

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^{n+1}}\right) = \frac{t^n}{n!}$$

Cumple la propiedad de Linealidad

$$\mathcal{L}^{-1}(c_1F(s) + c_2G(s)) = c_1f(t) + c_2g(t)$$

$d)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s-4} + 3\frac{1}{s^3}\right) = 2e^{4t} + 3\frac{t^2}{2!}$

$e)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+9}\right) = 2\frac{1}{3}\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^2+9}\right) \underset{\text{prop } 12}{=} \frac{2}{3}\operatorname{sen}(3t)$

$f)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+16}\right) \underset{\text{prop } 13}{=} \cos(4t)$

$g)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{20}{(s+3)^2}\right) = 20\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+3)^2}\right)$

La cual no figura en la Tabla

En este caso se puede aplicar la propiedad de traslación en “s”, esto es:

$$\mathcal{L}^{-1}\big(F(s-a)\big) = e^{at}f(t)$$

siendo $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big)$ donde $F(s)$ está sin trasladar

Luego para este ejemplo

$$F(s-a) = \frac{1}{(s+3)^2} \quad ; \quad \text{con} \quad a = -3;$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big) = t$$

Entonces reemplazando en la propiedad queda

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+3)^2}\right) \underset{\text{prop } 3}{=} e^{-3t}t$$

$h)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{(s-2)^3}\right) \underset{\text{prop } 3}{=} 4e^{2t}\frac{t^2}{2}$

Recordando la propiedad de Traslación en t que dice:

$$\mathcal{L}\big(f(t-a)u(t-a)\big)=e^{-as}F(s)$$

Cuando aparece una exponencial en "s" se debe aplicar la propiedad de traslación en "t". Para ello hay que identificar

1) el valor de a (coeficiente de "s" en la exponencial)

2) Analizar $F(s)$ y buscar su anti transformada, esto es, hallar $f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F(s))$

$h)$ $\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-3s}\dfrac{1}{s^2+16}\right)$

en este ejemplo $a=3$ y

$$F(s)=\frac{1}{s^2+16} \quad \underset{\text{prop. }12}{\Longrightarrow} \quad f(t)=\frac{\operatorname{sen}(4t)}{4}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-3s}\frac{1}{s^2+16}\right)=\frac{\operatorname{sen}(4(t-3))}{4}u(t-3)$$

$i)$ $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s+4}{s^2+6s+13}\right)$

En este ejemplo la función $F(s)$ no figura directamente en la tabla de Transformada.

Si se observa se parece a la transformada del $\cos(at)$ puesto que es la única transformada en la cual aparece la variable "s" en el numerador. Pero el denominador debe ser la suma de dos términos al cuadrado. Analicemos el denominador y veamos si es posible expresarlo como la suma de dos cuadrados.

Para ello empleamos la técnica de completar cuadrados. Se debe seleccionar las bases

$$c^2+2cd+d^2=(c+d)^2$$

$$\underbrace{s^2}_{c^2}+\underbrace{6s}_{2cd}+13 \quad \Longrightarrow \quad s=c \;\;,\;\; 6s=2cd \quad \Longrightarrow \begin{cases} c=s \\ d=\dfrac{6}{2}=3 \end{cases}$$

Siempre el segundo término d es la mitad del coeficiente que acompaña al término lineal. Luego para completar cuadrado se debe sumar y restar (para que la expresión no varíe) el segundo término al cuadrado. En este caso $d=3$, luego

$$s^2+6s+13=\underbrace{s^2+6s+3^2}_{(s+3)^2}-3^2+13=(s+3)^2+4$$

Luego reemplazando en la función dada

$$\frac{s+4}{s^2+6s+13} = \frac{s+4}{(s+3)^2+4}$$

Expresión que se parece a la transformada del coseno trasladado s una cantidad $a=-3$. Pero para que esto sea verdadero la variable "s" del numerador tiene que tener la misma traslación del denominador para ser una $F(s-a)=F(s+3)$. Se procede a trasladar el numerador pero se debe cuidar de no alterar el valor de la expresión, luego

$$\frac{s+4}{(s+3)^2+4} = \frac{s+3-3+4}{(s+3)^2+4} = \frac{s+3}{(s+3)^2+4} + \frac{1}{(s+3)^2+4}$$

De esta manera sí es una $F(s+3)$. Ya que la traslación del numerador debe ser igual a la traslación del denominador. Luego

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+4}{s^2+6s+13}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+3}{(s+3)^2+4} + \frac{1}{(s+3)^2+4}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+4}{s^2+6s+13}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+3}{(s+3)^2+4}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+3)^2+4}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+4}{s^2+6s+13}\right) = e^{-3t}\cos(2t) + e^{-3t}\frac{sen(2t)}{2}$$

Método de Convolución

En el caso que la función que se va a anti transformar se pueda expresar como el producto de dos funciones cuyas antitransformadas son conocidas, se aplica el método de Convolución.

Teorema de Convolución

Si $F(s)=\mathcal{L}(f(t))$, $G(s)=\mathcal{L}(g(t))$ entonces

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s).G(s)) = f(t)*g(t)$$

donde la operación $*$ se denomina Convolución y se calcula mediante la siguiente integral

$$f(t)*g(t) = \int_0^t f(x).g(t-x)dx$$

Demostración

Si se reemplaza $F(s)$ por su definición

$$\mathcal{L}^{-1}\big(F(s).G(s)\big) = \mathcal{L}^{-1}\left(\left(\left(\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx\right).G(s)\right)\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\left(\int_0^\infty f(x).(e^{-sx}G(s))dx\right)\right)$$

Como la operación antitransformada actúa sobre la variable "s" y es independiente de la integral respecto de x, se puede cambiar el orden de las operaciones sin alterar el resultado.

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s).G(s)) = \int_0^\infty f(x).\mathcal{L}^{-1}(e^{-sx}G(s))dx$$

Aplicando la propiedad de traslación en "t" con $a = x$ se tiene

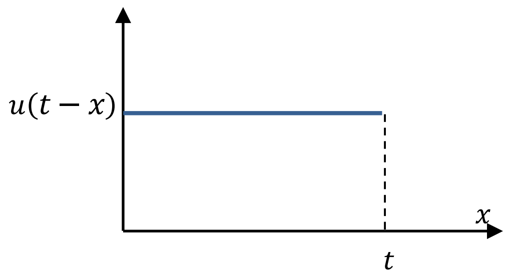
$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-sx}G(s)) = g(t-x)u(t-x)$$

Reemplazando queda

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s).G(s)) = \int_0^\infty f(x).g(t-x)u(t-x)dx$$

Recordando la definición de la Función escalón, se sabe que vale ***uno*** cuando su argumento es ***positivo*** (> 0) y vale ***cero*** para los valores del argumento que sean ***negativos*** o sea (< 0)

$$u(t-x) = \begin{cases} 1 & t-x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < t \\ 0 & t-x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > t \end{cases}$$



Esto hace que los límites de la integral se modifiquen para los valores de x donde la función es distinto de cero. Luego la transformada inversa del producto queda

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}(F(s).G(s)) = \int_0^t f(x)\ .g(t-x)dx \underbrace{=}_{\text{se define}} f(t) * g(t)}$$

(Se lee f convolución g)

Propiedades

1. Conmutativa
$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$$
2. Asociativa
$$\big(f(t) * g(t)\big) * h(t) = f(t) * (g(t) * h(t))$$
3. Convolución con la función delta
$$f(t) * \delta(t) = f(t)$$
4. La convolución con una función constante $g(t) = k$
$$f(t) * g(t) = f(t) * k = k \int_0^t f(x) dx$$
Esto se debe a que $g(t - x) = k$ por ser una función constante.

Ejemplos

1. Hallar:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} . \frac{1}{s+1}\right)$$

La antitransformada de cada factor se conoce por tabla

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1 \qquad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) = e^{-t}$$

Luego por el Teorema de Convolución será

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} . \frac{1}{s+1}\right) = 1 * e^{-t} = \int_0^t e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^t = -e^{-t} + 1$$

2. Calcular
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2} . \frac{1}{s+1}\right)$$

Nuevamente se puede aplicar Convolución y queda
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2} . \frac{1}{s+1}\right) = e^{-2t} * e^{-t} = \int_0^t e^{-x}\, e^{-2(t-x)} dx = e^{-2t} \int_0^t e^{-x}\, e^{2x} dx$$
$$= e^{-2t} \int_0^t e^{x}\, dx = e^{-2t}(e^{t} - 1)$$

Método de Fracciones Simples

Este método solo se aplica en el caso que $F(s)$ sea una función racional (cociente de dos polinomios)

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

donde $P(s)$ es un polinomio de grado n y $Q(s)$ es de grado m siendo $n < m$.

La idea del método es expresar $F(s)$ como la suma de fracciones simples, cuyas antitransformadas sean sencillas de resolver.

Lo primero que se hace es factorizar el denominador, es decir, se buscan las raíces o ceros del polinomio $Q(s)$ y siguiendo el teorema del Algebra se expresa $Q(s)$ como el producto de factores

$$Q(s) = a_0(s - r_1)(s - r_2) \dots (s - r_n)$$

donde a_0 es el coeficiente de la mayor potencia.

Por medio de ejemplos se analizarán los distintos casos

1) Raíces de $Q(s)$ reales y distintas

Hallar

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s + 1}{s^2 + 3s - 4}\right)$$

Las raíces de $Q(s)$ son 1 y -4 luego $Q(s)$ se puede expresar como

$$s^2 + 3s - 4 = (s - 1)(s + 4)$$

Se plantea entonces la identidad

$$\frac{2s + 1}{(s - 1)(s + 4)} = \frac{A}{s - 1} + \frac{B}{s + 4}$$

y se halla el valor de las constantes A y B que satisfacen la identidad para todo valor de "s".

Para calcular los coeficientes hay distintos métodos, nosotros trabajaremos de la siguiente manera:

- Cálculo de A

  Para calcular el coeficiente A se multiplica miembro a miembro por el denominador de A y se toma límite a ambos miembros para "s" tendiendo al valor de la raíz que figura en el denominador de A, o sea

$$\frac{(2s + 1)(s - 1)}{(s - 1)(s + 4)} = \frac{A(s - 1)}{s - 1} + \frac{B(s - 1)}{s + 4}$$

$$\lim_{s\to 1}\frac{(2s+1)}{(s+4)} = A + \lim_{s\to 1}\frac{B(s-1)}{s+4}$$

$$\frac{3}{5} = A + \underbrace{\lim_{s\to 1}\frac{B(s-1)}{s+4}}_{=0}$$

$$\boxed{A = \frac{3}{5}}$$

- Cálculo de B
  Análogamente se multiplica miembro a miembro por el denominador de B y se toma el límite a ambos miembros para "s" tendiendo al valor de la raíz del denominador de B

$$\frac{(2s+1)(s+4)}{(s-1)(s+4)} = \frac{A(s+4)}{s-1} + \frac{B(s+4)}{s+4}$$

$$\lim_{s\to -4}\frac{(2s+1)}{(s-1)} = \lim_{s\to -4}\frac{A(s+4)}{s-1} + B$$

$$\frac{-7}{-5} = B$$

$$\boxed{\frac{7}{5} = B}$$

- Luego se resuelve la antitransformada

$$F(s) = \frac{2s+1}{(s-1)(s+4)} = \frac{\frac{3}{5}}{s-1} + \frac{\frac{7}{5}}{s+4}$$

$$f(t) = \frac{3}{5}e^{t} + \frac{7}{5}e^{-4t}$$

2) Raíces reales y coincidentes

Hallar:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{(s-1)(s^2-4s+4)}\right)$$

Las raíces de $Q(s) = (s-1)(s^2-4s+4) = (s-1)(s-2)^2$ son: $s = 1$ y $s = 2$ (doble)

En el caso de raíces dobles la descomposición de fracciones simples se realiza así

$$\frac{s+2}{(s-1)(s-2)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B_1}{(s-2)^2} + \frac{B_2}{s-2}$$

- Cálculo de A

  Como la constante A corresponde al denominador proveniente de la raíz simple, se procede igual que en el apartado anterior, es decir, se multiplica a ambos miembros de la igualdad por el denominador de A y luego se toma límite para "s" tendiendo al valor de la raíz del denominador de A

$$\frac{(s+2)(s-1)}{(s-1)(s-2)^2} = \frac{A(s-1)}{s-1} + \frac{B_1(s-1)}{(s-2)^2} + \frac{B_2(s-1)}{s-2}$$

$$\frac{(s+2)}{(s-2)^2} = A + \frac{B_1(s-1)}{(s-2)^2} + \frac{B_2(s-1)}{s-2}$$

$$\lim_{s\to 1}\frac{(s+2)}{(s-2)^2} = A + \lim_{s\to 1}\left(\underbrace{\frac{B_1(s-1)}{(s-2)^2} + \frac{B_2(s-1)}{s-2}}_{0}\right)$$

$$\boxed{A=3}$$

- Cálculo de B_1

  Análogamente, para calcular B_1 se multiplica miembro a miembro por su denominador y luego se toma límite para el valor de "s" tendiendo a 2

$$\frac{(s+2)(s-2)^2}{(s-1)(s-2)^2} = \frac{A(s-2)^2}{s-1} + \frac{B_1(s-2)^2}{(s-2)^2} + \frac{B_2(s-2)^2}{s-2}$$

$$\frac{(s+2)}{(s-1)} = \frac{A(s-2)^2}{s-1} + B_1 + B_2(s-2)$$

$$\lim_{s\to 2}\frac{(s+2)}{(s-1)} = \lim_{s\to 2}\left(\frac{A(s-2)^2}{s-1} + B_1 + B_2(s-2)\right)$$

$$\boxed{B_1=4}$$

- Cálculo de B_2

  No se puede trabajar igual que en los casos anteriores porque daría una indeterminación. Para evitar este problema y considerando que $F(s)$ es una identidad (es válida para todo valor de "s") se le da un valor a "s" distinto de las raíces de $Q(s)$ y de tal manera que los cálculos resulten sencillos. Cualquiera sea el valor que se dé a "s" el resultado de B_2 es el mismo, porque es único.

  En este caso se puede dar el valor de $s=0$. Luego reemplazando en la expresión

$$F(s)=\frac{s+2}{(s-1)(s-2)^2}=\frac{A}{s-1}+\frac{B_1}{(s-2)^2}+\frac{B_2}{s-2}$$

$$F(0)=\frac{2}{-4}=\frac{A}{-1}+\frac{B_1}{(-2)^2}+\frac{B_2}{-2}$$

Reemplazando los valores calculados de A y B_2 se tiene

$$-\frac{1}{2}=-3+\frac{4}{4}+\frac{B_2}{-2}$$

$$\boxed{B_2=-3}$$

Reconstruyendo $F(s)$

$$F(s)=\frac{3}{s-1}+\frac{4}{(s-2)^2}+\frac{-3}{s-2}$$

$$f(t)=3e^{t}+4te^{2t}-3e^{2t}$$

3) Raíces complejas Conjugadas

Hallar la transformada inversa de

$$\frac{s-1}{(s+2)(s^2+2s+2)}$$

Las raíces de $Q(s)$ son $s=-2$ y $s=-1\pm j$

Observamos que tiene un par de raíces complejas conjugadas. En tal caso la descomposición en Fracciones Simples siempre se realiza de la siguiente manera:

$$\frac{s-1}{(s+2)(s^2+2s+2)}=\frac{A}{s+2}+\frac{Bs+C}{s^2+2s+2}$$

- Cálculo de A
  Para calcular A como es el coeficiente que corresponde a una fracción cuyo denominador es una raíz simple se procede como en el primer caso, o sea se multiplica miembro a miembro por el denominador de A y luego de simplificar lo que corresponde se toma límite para "s" tendiendo al valor de la raíz

$$\frac{(s-1)(s+2)}{(s+2)(s^2+2s+2)}=\frac{A(s+2)}{s+2}+\frac{(Bs+C)(s+2)}{s^2+2s+2}$$

$$\lim_{s\to-2}\frac{(s-1)}{(s^2+2s+2)}=A+\lim_{s\to-2}\frac{(Bs+C)(s+2)}{s^2+2s+2}$$

$$\boxed{A = -\frac{3}{2}}$$

- Cálculo de B

  Para calcular B se multiplica por "s" a ambos miembros de la expresión de $F(s)$ en fracciones simples y se toma el límite a ambos miembros para $s \to \infty$

$$\frac{s-1}{(s+2)(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2}$$

$$\frac{(s-1)s}{(s+2)(s^2+2s+2)} = \frac{As}{s+2} + \frac{(Bs+C)s}{s^2+2s+2}$$

$$\lim_{s\to\infty} \frac{(s^2-s)}{(s+2)(s^2+2s+2)} = \lim_{s\to\infty} \left(\frac{As}{s+2} + \frac{(Bs^2+Cs)}{s^2+2s+2}\right)$$

  Recordando la propiedad del límite para "x" tendiendo a infinito de un cociente de polinomios $P_n(x)$ de grado n y $Q_m(x)$ de grado m que dice:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} 0 \quad si \;\; n < m \\ \infty \quad si \; n > m \\ \dfrac{p_0}{q_o} \quad si \; n = m \end{cases} \qquad \text{siendo} \quad \begin{matrix} p_0 & \text{coef. de } x^n \\ q_o & \text{coef. de } x^m \end{matrix}$$

  Luego en la expresión anterior el límite queda:

$$0 = A + B \quad \Longrightarrow \quad B = -A$$

$$\boxed{B = \frac{3}{2}}$$

- Cálculo de C

  Para calcular C se da un valor cualquiera a "s" que no haya sido dado antes

  Por ejemplo $s = 0$. Reemplazando en la expresión queda

$$\frac{s-1}{(s+2)(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2}$$

$$\frac{-1}{4} = \frac{A}{2} + \frac{C}{2}$$

$$-\frac{1}{4} = -\frac{\frac{3}{2}}{2} + \frac{C}{2}$$

$$\boxed{C = 1}$$

Reescribiendo la expresión de $F(s)$ resulta:

$$F(s) = \frac{-\frac{3}{2}}{s+2} + \frac{\frac{3}{2}s + 1}{s^2+2s+2}$$

$$f(t) = -\frac{3}{2}e^{-2t} + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{3}{2}s + 1}{(s+1)^2 + 1}\right)$$

$$\frac{\frac{3}{2}s + 1}{(s+1)^2 + 1} = \frac{\frac{3}{2}(s + 1 - 1) + 1}{(s+1)^2 + 1} = \frac{\frac{3}{2}(s + 1) - \frac{3}{2} + 1}{(s+1)^2 + 1}$$

$$\frac{\frac{3}{2}s + 1}{(s+1)^2 + 1} = \frac{3}{2}\frac{(s+1)}{(s+1)^2 + 1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^2 + 1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{3}{2}s + 1}{(s+1)^2 + 1}\right) = \frac{3}{2}e^{-t}\cos(t) - \frac{1}{2}e^{-t}\mathrm{sen}(t)$$

$$f(t) = -\frac{3}{2}e^{-2t} + \frac{3}{2}e^{-t}\cos(t) - \frac{1}{2}e^{-t}\mathrm{sen}(t)$$