Universidad Nacional de San Juan

Facultad de Ingeniería

MATEMÁTICA APLICADA

Ingeniería Mecánica
Ingeniería Electromecánica

Equipo de Cátedra

Profesor Titular	Dr. Javier Gimenez
Jefe de Trabajos Prácticos	Dr. Emanuel Tello

AÑO 2023

Tercer semana de Clases

Aplicación de la Transformada de Laplace

INTRODUCCIÓN

Hay sistemas físicos modelados con Ecuaciones Diferenciales Lineales de Coeficientes Constantes como:

a) Sistema Masa - Resorte

$$m\ddot{x} + \beta x + kx = f(t) \quad \text{siendo Cond. Inic.} \begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

b) Sistema de Circuito Eléctrico en Serie RLC

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = e(t) \quad \text{siendo Cond Inic.} \begin{cases} q(0) = q_0 \\ \dot{q}(0) = i_0 \end{cases}$$

Ambas ecuaciones son Ecuaciones Diferenciales Lineales en las que $f(t)$ ó $e(t)$ representan la excitación (causa) que producen una respuesta (efecto) dado por $x(t)$ ó $q(t)$.

Se puede escribir esta relación definiendo un operador $\mathcal{R}$

$$\mathcal{R}\big(f(t)\big) = x(t)$$

$$\mathcal{R}\big(e(t)\big) = q(t)$$

Y se lee : *"La respuesta a la entrada $f(t)$ es $x(t)$"*

"La respuesta a la entrada $e(t)$ es $q(t)$ "

Como las dos ecuaciones son idénticas en su estructura se pueden generalizar así

$$\begin{cases} a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = f(t) \\ \qquad y(0) = A \\ \qquad \dot{y}(0) = B \end{cases} \qquad (1)$$

$$\mathcal{R}\big(f(t)\big) = y(t)$$

Siendo $f(t)$ (entrada , causa , excitación)

$y(t)$ (salida , efecto , respuesta)

Los parámetros a, b, c son constantes físicas, y A, B corresponden a las condiciones iniciales

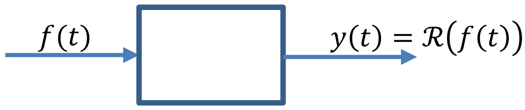
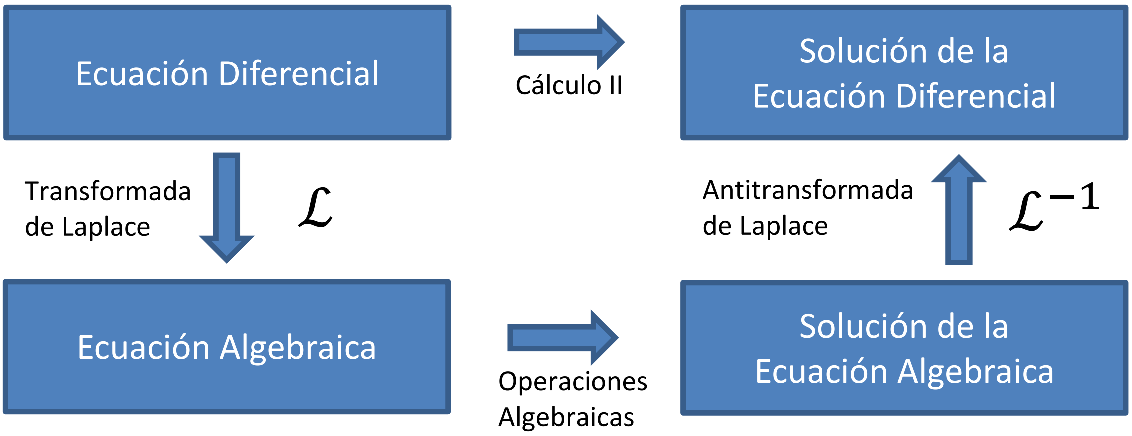


Figura 1

Solución Aplicando Transformada de Laplace

La Transformada de Laplace es una herramienta matemática que permite resolver Ecuaciones Diferenciales Lineales con condiciones iniciales dadas. Al aplicar la Transformada a una Ecuación Diferencial se transforma en una Ecuación Algebraica, cuya resolución permite hallar de forma sencilla una solución $Y(s)$. Finalmente, aplicando la transforma inversa se halla la solución $y(t)$ de la E.D. original.



Apliquemos la transformada a una Ecuación Diferencial Lineal de orden 2 (1)

$$\mathcal{L}(a\ddot{y} + b\dot{y} + cy) = \mathcal{L}(f(t))$$

Aplicando las propiedades de Linealidad y de la derivada de la transformada se obtiene

$$a\mathcal{L}(\ddot{y}) + b\mathcal{L}(\dot{y}) + c\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(f(t)) \quad (2)$$

Pero:

$$\mathcal{L}(y) = Y(s)$$

$$\mathcal{L}(\dot{y}) = sY(s) - y(0) = sY(s) - A$$

$$\mathcal{L}(\ddot{y}) = s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) = s^2Y(s) - As - B$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$$

Reemplazando en (2)

$$a(s^2Y(s) - As - B) + b(sY(s) - A) + cY(s) = F(s)$$

$$\underbrace{(as^2 + bs + c)}_{1/H(s)}Y(s) - aAs - aB - bA = F(s)$$

$$Y(s)\frac{1}{H(s)} = F(s) + (aAs + aB + bA)$$

$$Y(s) = \underbrace{F(s)H(s)}_{(I)} + \underbrace{(aAs + aB + bA)H(s)}_{(II)} \qquad (3)$$

donde

$$H(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c} \qquad \text{siendo} \qquad h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(s))$$

Nota:

En la solución $Y(s)$ de (3) se observan dos términos importantes, en el término (I) intervienen solamente la transformada de la función entrada $F(s)$ y $H(s)$ que contiene información de la Ecuación Diferencial a resolver. En su denominador la expresión polinómica coincide con la expresión de la E.D. reemplazando las derivadas por potencias de "s". En el término (II) figuran las condiciones iniciales del problema.

Aplicando la transformada inversa, la respuesta del sistema a la entrada dada es

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\big(F(s)H(s)\big) + \mathcal{L}^{-1}\big((aAs + aB + bA)H(s)\big)$$

Nota: En caso de no conocer las condiciones iniciales, esto es, desconocer A y B, la solución que se halla es una solución general con constantes A y B, las cuales se pueden hallar usando otro tipo de datos adicionales como pueden ser condiciones de contorno.

En el caso particular que las condiciones iniciales sean nulas se tiene que la respuesta del sistema a la entrada $f(t)$ es

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\big(F(s)H(s)\big)$$

Aplicando el Teorema de Convolución se tiene

$$\boxed{y(t) = f(t) * h(t)}$$

O sea que siempre que las condiciones iniciales sean nulas ***conociendo*** $h(t)$ ***se puede conocer la respuesta para cualquier entrada*** $f(t)$

El problema es determinar $h(t)$

Cálculo de $h(t)$

Asumamos por ejemplo que $f(t) = \delta(t)$ y calculemos $h(t)$ resolviendo el siguiente sistema

$$\begin{cases} a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = \delta(t) \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

Aplicando la Transformada a ambos miembros se tiene

$$\mathcal{L}(a\ddot{y} + b\dot{y} + cy) = \mathcal{L}(\delta(t))$$

De (3), como $F(s) = \mathcal{L}(\delta(t)) = 1$ y las condiciones iniciales son nulas, resulta

$$Y(s) = F(s)H(s) = H(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c}$$

Aplicando antitransformada se tiene

$$y(t) = h(t)$$

Conclusión

$h(t)$ es la respuesta a la $\delta(t)$ en un sistema de E.D. Lineal con condiciones nulas.

Sistemas Lineales, Invariantes en el tiempo y Causales.

- Sistema Lineal

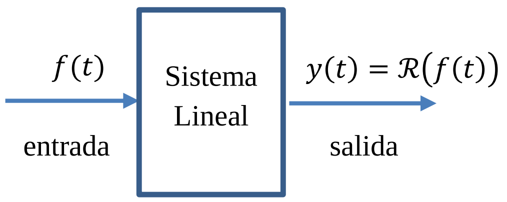


Figura 2

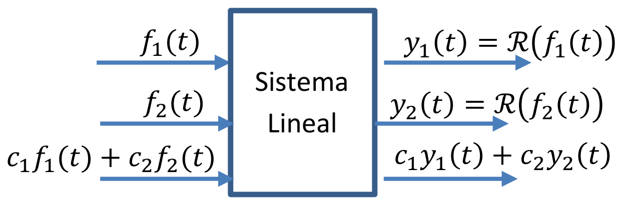


Figura 3

Un operador es lineal cunado cumple:

$$\mathcal{R}(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) = c_1\mathcal{R}(\, f_1(t)) + c_2\mathcal{R}(\, f_2(t))$$

Además si $c_1 = c_2 = 0$

$$\mathcal{R}(0) = 0$$

Es decir, los sistemas lineales verifican que la respuesta a una entrada cero es nula.

- Sistema Invariante

$$\mathcal{R}\big(f(t)\big) = y(t) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{R}\big(f(t-t_0)\big) = y(t-t_0)$$

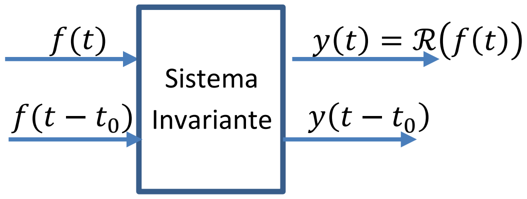


Figura 4

- Sistema Causal

Un sistema es causal cuando la respuesta no se anticipa a la salida, esto es:

$$f(t) = 0 \quad \text{para } t < t_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{R}\big(f(t)\big) = 0 \quad \text{para} \quad t < t_0$$

En otras palabras

$$\mathcal{R}\big(f(t)u(t-t_0)\big) = u(t-t_0)\mathcal{R}(f(t))$$

Ejemplo: El siguiente sistema es lineal, invariante en el tiempo y causal

$$\begin{cases} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \\ \quad y^{(n-1)}(0) = \cdots = y'(0) = y(0) = 0 \quad \text{(cond. iniciales)} \end{cases}$$

Propiedad: Dado un sistema lineal, causal e invariante en el tiempo, la respuesta a cualquier entrada $f(t)$ es

$$\mathcal{R}(f(t)) = f(t) * h(t)$$

siendo

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(s))$$

$$h(t) = \mathcal{R}(\delta(t))$$

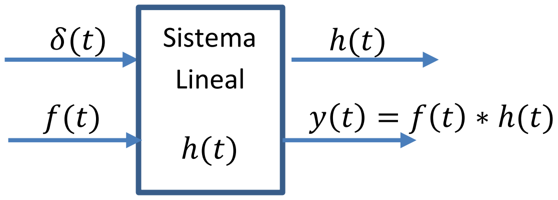


Figura 5

Expresado en el Dominio "s" recordando que $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$

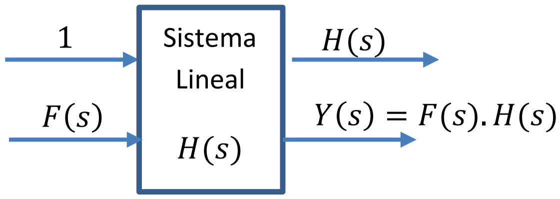


Figura 6

Notas:

- La función $H(s)$ recibe el nombre de Función de Transferencia. Actúa como factor de amplificación
- Conocida $h(t)$ se puede obtener la respuesta a cualquier entrada. No hace falta aplicar la Transformada de Laplace. Esto siempre que sea lineal, causal e invariante en el tiempo.
- A veces es conveniente aplicar la transformada porque es más sencillo que calcular la convolución.
- Sabiendo que se cumple

$$Y(s) = H(s).F(s)$$

  Conocida dos de estas funciones se puede calcular la tercera y luego aplicar la transformada inversa para obtener la función buscada en términos de "t"

Ejemplos

1. Hallar la solución del siguiente sistema

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = e^{-2t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Como sus condiciones iniciales son distintas de cero, no se puede aplicar la Propiedad. Sin embargo, aplicando la Transformada de Laplace a ambos miembros resultan

$$\mathcal{L}\big(y(t)\big) = Y(s)$$

$$\mathcal{L}\big(y'(t)\big) = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$$

$$\mathcal{L}\big(y''(t)\big) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s1 - 2$$

$$\mathcal{L}(e^{-2t}) = \frac{1}{s+2}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial se obtiene:

$$s^2Y(s) - 1s - 2 + 3(sY(s) - 1) + 2Y(s) = \frac{1}{s+2}$$

Reordenando esta expresión sacando factor común $Y(s)$ se obtiene:

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = \frac{1}{s+2} + s + 5$$

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = \frac{s^2 + 7s + 11}{s+2}$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + 7s + 11}{(s+2)(s^2 + 3s + 2)}$$

Se debe calcular la antitransformada aplicando por ejemplo el método de Fracciones Simples. Las raíces del denominador son: $s = -2$ (doble) , $s = -1$

$$Y(s) = \frac{s^2 + 7s + 11}{(s+2)^2(s+1)} = \frac{A_1}{(s+2)^2} + \frac{A_2}{(s+2)} + \frac{B}{s+1}$$

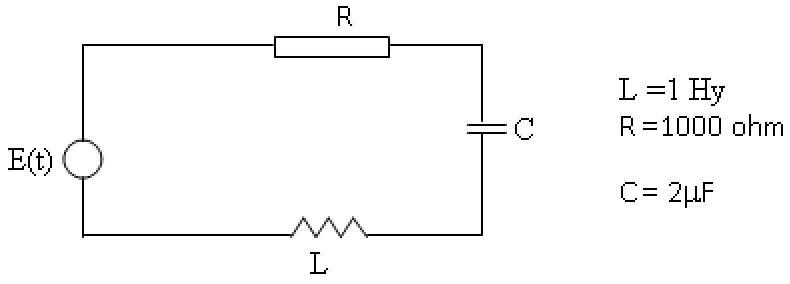
Realizando las operaciones correspondientes los valores de las constantes son:

$B = 5$ $\quad A_1 = -1$ $\quad A_2 = -4$

$$Y(s) = \frac{-1}{(s+2)^2} + \frac{-4}{(s+2)} + \frac{5}{s+1}$$

$$y(t) = -te^{-2t} - 4e^{-2t} + 5e^{-t}$$

2. Sea un circuito RLC



Hallar la respuesta sabiendo que $q(0) = 0$, $i(0) = 0$ para cada uno de los siguientes casos:

a) $E(t) = \delta(t)$

b) $E(t) = 100\ v$

c) $E(t) = e^{-500t}$

Solución:

La ecuación diferencial asociada a este modelo físico es:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{c}q = E(t)$$

Como $2\mu F \equiv 0.000002F$

$$\begin{cases} \ddot{q} + 1000\dot{q} + \dfrac{1}{0.000002}q = E(t) \\ q(0) = 0 \\ i(0) = 0 \end{cases}$$

a) Aplicando Transformada $E(t) = \delta(t) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}\big(E(t)\big) = 1$

$$(s^2 + 1000s + 500000)Q(s) = 1$$

$$Q(s) = \frac{1}{s^2 + 1000s + 500000}$$

$$Q(s) = H(s) = \frac{1}{(s + 500)^2 + 250000}$$

$$h(t) = \frac{1}{500}e^{-500t}\text{sen}(500t)$$

b) $E(t) = 100$

Por ser un sistema Lineal, invariante, y causal se puede aplicar la Propiedad.

$$q(t) = h(t) * E(t) = \frac{1}{500} e^{-500t} \operatorname{sen}(500t) * 100$$

Aplicando la propiedad de convolución por una constante

$$q(t) = 100 \int_0^t \frac{1}{500} e^{-500x} \operatorname{sen}(500x) dx$$

Como esta integral es complicada porque se debe aplicar el método por partes dos veces conviene transformar y resolver por otro método como puede ser el de Fracciones Simples

$$q(t) = h(t) * E(t)$$
$$Q(s) = H(s).E(s)$$
$$Q(s) = \frac{1}{(s+500)^2 + 250000} . \frac{100}{s}$$

La descomposición en Fracciones simples es

$$\frac{100}{s((s+500)^2 + 250000)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{(s+500)^2 + 250000}$$

- Cálculo de A

  Multiplicamos miembro a miembro por "s" y se toma el limite cuando "s" tiende a cero

$$\frac{100s}{((s+500)^2 + 250000)s} = \frac{As}{s} + \frac{(Bs + C)s}{(s+500)^2 + 250000}$$

$$\lim_{s \to 0} \frac{100}{((s+500)^2 + 250000)} = A + \lim_{s \to 0} \frac{(Bs + C)s}{(s+500)^2 + 250000}$$

$$\boxed{A = \frac{1}{5000}}$$

- Cálculo de B

  Se multiplica por "s" y se toma el límite para "s" tendiendo a infinito

$$\lim_{s \to \infty} \frac{100}{((s+500)^2 + 250000)} = A + \lim_{s \to \infty} \frac{(Bs + C)s}{(s+500)^2 + 250000}$$

$$0 = A + B \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{B = -A}$$

- Cálculo de C.

  Se da un valor de "s" que no ha sido dado antes. Por ejemplo $s = -500$

$$\frac{100}{((-500+500)^2+250000)(-500)} = \frac{A}{-500} + \frac{B(-500)+C}{(-500+500)^2+250000}$$

$$-\frac{1}{1250000} = -\frac{1}{2500000} + \frac{1}{2500000} + \frac{C}{250000}$$

$$\boxed{C = -\frac{1}{5}}$$

Reconstruyendo la expresión de $Q(s)$

$$Q(s) = \frac{1}{5000}\frac{1}{s} + \frac{-\frac{1}{5000}s}{(s+500)^2+250000} + \frac{-\frac{1}{5}}{(s+500)^2+250000}$$

$$Q(s) = \frac{1}{5000}\frac{1}{s} + \frac{-\frac{1}{5000}(s+500-500)}{(s+500)^2+250000} + \frac{-\frac{1}{5}}{(s+500)^2+250000}$$

$$Q(s) = \frac{1}{5000}\frac{1}{s} + \frac{-\frac{1}{5000}(s+500)}{(s+500)^2+250000} + \frac{-\frac{1}{10}}{(s+500)^2+250000}$$

$$\boxed{q(t) = \frac{1}{5000} - \frac{1}{5000}e^{-500t}\cos(500t) - \frac{1}{5000}e^{-500t}\operatorname{sen}(500t)}$$

c) $E(t) = e^{-500t}$

Aplicando la Propiedad se tiene que:

$$q(t) = h(t) * E(t)$$

$$q(t) = \frac{1}{500}e^{-500t}\operatorname{sen}(500t) * e^{-500t}$$

$$q(t) = \int_o^t f(x)g(t-x)dx$$

$$q(t) = \int_0^t \frac{1}{500}e^{-500x}\operatorname{sen}(500x)\, e^{-500(t-x)}dx$$

$$q(t) = \frac{e^{-500t}}{500}\int_0^t e^{-500x+500x}\operatorname{sen}(500x)\,dx$$

$$q(t) = \frac{e^{-500t}}{500}\left(-\frac{\cos(500x)}{500}\bigg|_0^t\right) = \frac{e^{-500t}}{500}\left(-\frac{\cos(500t)}{500} + \frac{1}{500}\right)$$

$$\boxed{q(t) = \frac{e^{-500t}}{500^2}(1-\cos(500t))}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

La Transformada de Laplace permite también resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales a coeficientes constantes. La técnica se mostrará mediante un ejemplo.

Resolver el sistema

$$\begin{cases} x' = 3x + y - 1 \\ y' = -4x - y + 3e^{2t} \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Aplicando Transformada de Laplace a ambos miembros de ambas ecuaciones resulta el siguiente sistema de ecuaciones algebraico

$$\begin{cases} sX(s) - 0 = 3X(s) + Y(s) - \dfrac{1}{s} \\ sY(s) - 1 = -4X(s) - Y(s) + \dfrac{3}{s-2} \end{cases}$$

donde las incógnitas a hallar son $X(s)$ e $Y(s)$. Agrupando resulta

$$\begin{cases} (s-3)X(s) - Y(s) = -\dfrac{1}{s} \\ 4X(s) + (s+1)Y(s) = \dfrac{3}{s-2} + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (s-3)X(s) - Y(s) = -\dfrac{1}{s} \\ 4X(s) + (s+1)Y(s) = \dfrac{s+1}{s-2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} s-3 & -1 \\ 4 & s+1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{s} \\ \dfrac{s+1}{s-2} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}}$$

Regla de Cramer o del Determinante

Para hallar $X(s)$ e $Y(s)$ se pueden aplicar diversas técnicas de resolución de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, entre ellas la Regla de Cramer o del determinante. La misma requiere del cálculo del determinante de la matriz $\boldsymbol{A}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} s-3 & -1 \\ 4 & s+1 \end{vmatrix} = (s-3)(s+1) - (-1)4 = s^2 + s - 3s - 3 + 4 = s^2 - 2s + 1$$

$$\therefore \Delta = (s-1)^2$$

Además, se debe calcular un determinante por cada función incógnita a las matrices que surgen de reemplazar cada columna de $\boldsymbol{A}$ por el vector columna $\boldsymbol{b}$ resultando

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -\frac{1}{s} & -1 \\ \frac{s+1}{s-2} & s+1 \end{vmatrix} = -\frac{s+1}{s} + \frac{s+1}{s-2} = \frac{-(s+1)(s-2)+s(s+1)}{s(s-2)} =$$

$$= \frac{-s^2+2s-s+2+s^2+s}{s(s-2)} = \frac{2s+2}{s(s-2)} = \frac{2(s+1)}{s(s-2)}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} s-3 & -\frac{1}{s} \\ 4 & \frac{s+1}{s-2} \end{vmatrix} = \frac{(s-3)(s+1)}{s-2} + \frac{4}{s} = \frac{s^2-2s-3}{s-2} + \frac{4}{s}$$

$$= \frac{s^3-2s^2-3s+4s-8}{s(s-2)} = \frac{s^3-2s^2+s-8}{s(s-2)}$$

Luego la solución al sistema algebraico planteado en el dominio de Laplace viene dada por

$$X(s) = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\frac{2(s+1)}{s(s-2)}}{(s-1)^2} = \frac{2(s+1)}{s(s-2)(s-1)^2}$$

$$Y(s) = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\frac{s^3-2s^2+s-8}{s(s-2)}}{(s-1)^2} = \frac{s^3-2s^2+s-8}{s(s-2)(s-1)^2}$$

Solución en el dominio temporal

Una vez halladas $X(s)$ e $Y(s)$ se deben antitransformar para hallar $x(t)$ e $y(t)$. Para ello se pueden aplicar diversas técnicas, entre las cuales se encuentra fracciones simples. Comencemos hallando $x(t)$.

$$X(s) = \frac{2(s+1)}{s(s-2)(s-1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C_1}{s-1} + \frac{C_2}{(s-1)^2}$$

Cálculo de A:

$$sX(s) = \frac{2(s+1)}{(s-2)(s-1)^2} = A + \frac{Bs}{s-2} + \frac{C_1 s}{s-1} + \frac{C_2 s}{(s-1)^2}$$

$$\lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{s\to 0} \frac{2(s+1)}{(s-2)(s-1)^2} = \lim_{s\to 0} A + \lim_{s\to 0} \frac{Bs}{s-2} + \lim_{s\to 0} \frac{C_1 s}{s-1} + \lim_{s\to 0} \frac{C_2 s}{(s-1)^2}$$

$$-1 = A + 0 + 0 + 0$$

$$\boxed{A=-1}$$

Cálculo de B:

$$X(s)=\frac{2(s+1)}{s(s-2)(s-1)^2}=-\frac{1}{s}+\frac{B}{s-2}+\frac{C_1}{s-1}+\frac{C_2}{(s-1)^2}$$

$$(s-2)X(s)=\frac{2(s+1)}{s(s-1)^2}=-\frac{s-2}{s}+B+\frac{C_1(s-2)}{s-1}+\frac{C_2(s-2)}{(s-1)^2}$$

$$\lim_{s\to2}(s-2)X(s)=\lim_{s\to2}\frac{2(s+1)}{s(s-1)^2}=-\lim_{s\to2}\frac{s-2}{s}+\lim_{s\to2}B+\lim_{s\to2}\frac{C_1(s-2)}{s-1}+\lim_{s\to2}\frac{C_2(s-2)}{(s-1)^2}$$

$$3=0+B+0+0$$

$$\boxed{B=3}$$

Cálculo de C_2:

$$X(s)=\frac{2(s+1)}{s(s-2)(s-1)^2}=-\frac{1}{s}+\frac{3}{s-2}+\frac{C_1}{s-1}+\frac{C_2}{(s-1)^2}$$

$$(s-1)^2X(s)=\frac{2(s+1)}{s(s-2)}=-\frac{(s-1)^2}{s}+\frac{3(s-1)^2}{s-2}+C_1(s-1)+C_2$$

$$\lim_{s\to1}(s-1)^2X(s)=\lim_{s\to1}\frac{2(s+1)}{s(s-2)}=-\lim_{s\to1}\frac{(s-1)^2}{s}+\lim_{s\to1}\frac{3(s-1)^2}{s-2}+\lim_{s\to1}C_1(s-1)+\lim_{s\to1}C_2$$

$$-4=0+0+0+C_2$$

$$\boxed{C_2=-4}$$

Cálculo de C_1: Reemplazando s por -1 (o cualquier valor que no sea raíz en el denominador)

$$X(s)=\frac{2(s+1)}{s(s-2)(s-1)^2}=-\frac{1}{s}+\frac{3}{s-2}+\frac{C_1}{s-1}-\frac{4}{(s-1)^2}$$

$$X(-1)=0=1-1-\frac{C_1}{2}-1$$

$$\boxed{C_1=-2}$$

Por lo tanto

$$X(s)=-\frac{1}{s}+\frac{3}{s-2}-\frac{2}{s-1}-\frac{4}{(s-1)^2}$$

Aplicando la Antitransformada resulta

$$\boxed{x(t) = -1 + 3e^{2t} - 2e^{t} - 4te^{t}}$$

Para hallar $y(t)$ se puede aplicar el mismo procedimiento partiendo de

$$Y(s) = \frac{s^3 - 2s^2 + s - 8}{s(s-2)(s-1)^2}$$

o se puede usar $x(t)$ en conjunto con alguna de las ecuaciones del sistema como

$$x' = 3x + y - 1 \quad \Longrightarrow \quad y = x' - 3x + 1$$

Resolvamos por separado:

$$x' = 6e^{2t} - 2e^{t} - 4e^{t} - 4te^{t} = 6e^{2t} - 6e^{t} - 4te^{t}$$

$$-3x = 3 - 9e^{2t} + 6e^{t} + 12te^{t}$$

Reemplazando

$$y(t) = 6e^{2t} - 6e^{t} - 4te^{t} + 3 - 9e^{2t} + 6e^{t} + 12te^{t} + 1$$

$$\boxed{y(t) = -3e^{2t} + 8te^{t} + 4}$$

Ejemplo de Aplicación: Motor DC

Los motores de corriente continua (DC: direct current) son dispositivos que generan una fuerza mecánica a partir de aplicarles una determinada tensión eléctrica. Estas máquinas eléctricas son muy útiles en cualquier campo de la ingeniería ya que la energía mecánica producida puede ser utilizada para mover maquinarias pesadas, tracciones, movimiento de brazos robóticos, movimiento y traslación de elementos, grúas, etc.

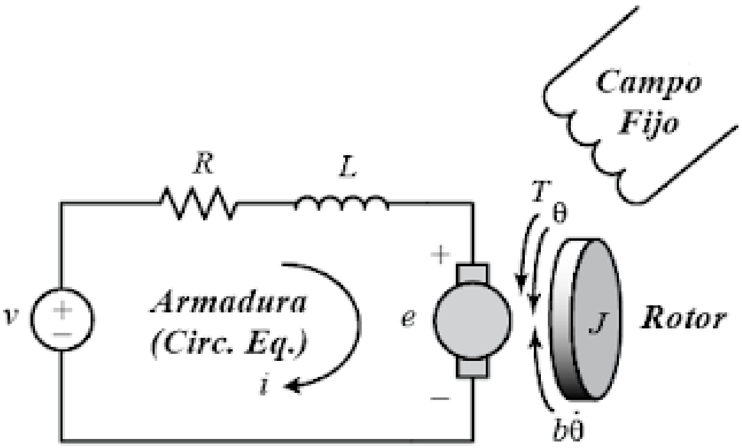


Figura 1. Motor DC.

Los modelos matemáticos permiten representar las leyes físicas que gobiernan un sistema dinámico mediante **ecuaciones diferenciales**. La Figura 1 muestra el modelo de un motor DC serie cuyo modelo matemático tiene una parte eléctrica y otra mecánica. Luego se tiene un **sistema** de ecuaciones diferenciales que en conjunto modelan el motor DC:

$$\begin{cases} L\ \dfrac{di(t)}{dt} + R\ i(t) = v(t) - e(t) \qquad (1) \\ J\ \dfrac{d^2\theta(t)}{dt^2} + b\ \dfrac{d\theta(t)}{dt} = K\ i(t) \qquad (2) \end{cases}$$

La ecuación (1) representa la parte eléctrica del modelo, en donde se tiene una resistencia R y una inductancia L correspondiente al bobinado de armadura del motor en el cual circula una determinada corriente $i(t)$. En el miembro derecho de (1), $v(t)$ es la tensión aplicada en los bornes del mismo, la cual genera una fuerza contra electro motriz (f.c.e.m.) denotada con $e(t)$. Por la ley de Faraday-Lenz, esta f.c.e.m. que se induce en el bobinado del rotor se opone a la causa que la genera, y por ende, $e(t)$ aparece restando a la tensión en bornes del motor $v(t)$.

La ecuación (2) representa la parte mecánica del motor expresada en términos de la posición angular $\theta(t)$. Luego se tiene el momento de inercia del rotor J y una constante o coeficiente de fricción del mismo b. Esta ecuación diferencial tiene como entrada de referencia el torque o cupla motora $K.i(t)$, donde K es una constante del sistema. Se puede demostrar que la f.c.e.m. $e(t)$ de (1) también puede expresarse en función de la velocidad angular como

$$e(t) = K\ \frac{d\theta(t)}{dt} \qquad (3)$$

Ejercicio: Resolver el sistema (1)-(3) sabiendo que $R = 6\Omega$, $J = 1$, $b = 1$, $L = $ 1H, $K = 2$, y usando $V(t) = 10$V. Además, considerar que inicialmente la posición y velocidad angular del motor son 0, y la corriente inicial es de 13A.

Solución:

Las incógnitas del sistema son $\theta(t)$, $i(t)$ y $e(t)$.

Ordenemos las ED convenientemente, reemplacemos las constantes dadas en el problema, y transformemos al dominio de Laplace

Ecuación (1):

$$\frac{di(t)}{dt} + 6\ i(t) + e(t) = 10$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{di(t)}{dt} + 6\ i(t) + e(t)\right) = \mathcal{L}(10)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{di(t)}{dt}\right) + 6\mathcal{L}\big(i(t)\big) + \mathcal{L}\big(e(t)\big) = \mathcal{L}(10)$$

$$sI(s) - 13 + 6I(s) + E(s) = \frac{10}{s}$$

$$(s+6)I(s) + E(s) = \frac{10}{s} + 13$$

$$(s+6)I(s) + E(s) = \frac{13s+10}{s} \qquad (4)$$

Ecuación (2):

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{d\theta(t)}{dt} - 2\,i(t) = 0$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}\right) + \mathcal{L}\left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right) - 2\mathcal{L}\big(i(t)\big) = 0$$

$$s^2\Theta(s) - s\theta(0) - \dot{\theta}(0) + s\Theta(s) - \theta(0) - 2I(s) = 0$$

$$(s^2 + \mathrm{s})\Theta(s) - 2I(s) = 0 \qquad (5)$$

Ecuación (3):

$$-2\frac{d\theta(t)}{dt} + e(t) = 0$$

$$-2\mathcal{L}\left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right) + \mathcal{L}\big(e(t)\big) = 0$$

$$-2s\Theta(s) + E(s) = 0 \qquad (6)$$

Agrupando las ecuaciones (4)-(6) resulta

$$\begin{bmatrix} 0 & s+6 & 1 \\ s^2+s & -2 & 0 \\ -2s & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Theta(s) \\ I(s) \\ E(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{13s+10}{s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculando determinantes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & s+6 & 1 \\ s^2+s & -2 & 0 \\ -2s & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (s+6)\begin{vmatrix} s^2+s & 0 \\ -2s & 1 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} s^2+s & -2 \\ -2s & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - (s+6)(s^2+s) - 4s = -s^3 - s^2 - 6s^2 - 6s - 4s = -s^3 - 7s^2 - 10s$$
$$= -s(s+2)(s+5)$$

Por otro lado

$$\Delta_\theta = \begin{vmatrix} \frac{13s+10}{s} & s+6 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{13s+10}{s}.\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (s+6)\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{13s+10}{s}.(-2) = \frac{-26s-20}{s}$$

Luego

$$\Theta(s) = \frac{\Delta_\theta}{\Delta} = \frac{26s+20}{s^2(s+2)(s+5)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+5}$$

Cálculo de A_2:

$$s^2\Theta(s) = \frac{26s+20}{(s+2)(s+5)} = A_1 s + A_2 + \frac{Bs^2}{s+2} + \frac{Cs^2}{s+5}$$

$$\lim_{s\to 0} s^2\Theta(s) = \lim_{s\to 0} \frac{26s+20}{(s+2)(s+5)} = \lim_{s\to 0} A_1 s + A_2 + \lim_{s\to 0} \frac{Bs^2}{s+2} + \lim_{s\to 0} \frac{Cs^2}{s+5}$$

$$2 = 0 + A_2 + 0 + 0$$

$$\boxed{A_2 = 2}$$

Cálculo de B:

$$(s+2)\Theta(s) = \frac{26s+20}{s^2(s+5)} = \frac{A_1(s+2)}{s} + \frac{A_2(s+2)}{s^2} + B + \frac{C(s+2)}{s+5}$$

$$\lim_{s\to -2} (s+2)\Theta(s) = \lim_{s\to -2} \frac{26s+20}{s^2(s+5)} = \lim_{s\to -2} \frac{A_1(s+2)}{s} + \lim_{s\to -2} \frac{A_2(s+2)}{s^2} + B + \lim_{s\to -2} \frac{C(s+2)}{s+5}$$

$$-\frac{8}{3} = 0 + 0 + B + 0$$

$$\boxed{B = -\frac{8}{3}}$$

Cálculo de C:

$$(s+5)\Theta(s) = \frac{26s+20}{s^2(s+2)} = \frac{A_1(s+5)}{s} + \frac{A_2(s+5)}{s^2} + \frac{B(s+5)}{s+2} + C$$

$$\lim_{s\to -5}(s+5)\Theta(s) = \lim_{s\to -5}\frac{26s+20}{s^2(s+2)} = \lim_{s\to -5}\frac{A_1(s+5)}{s} + \lim_{s\to -5}\frac{A_2(s+5)}{s^2} + \lim_{s\to -5}\frac{B(s+5)}{s+2} + C$$

$$\frac{22}{15} = 0 + 0 + 0 + C$$

$$\boxed{C = \frac{22}{15}}$$

Finalmente, reemplazando $s = 1$ resulta

$$\Theta(1) = \frac{23}{9} = A_1 + 2 - \frac{8}{9} + \frac{11}{45}$$

$$\boxed{A_1 = \frac{6}{5}}$$

Por lo tando

$$\Theta(s) = \frac{6}{5}\frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} - \frac{8}{3}\frac{1}{s+2} + \frac{22}{15}\frac{1}{s+5}$$

$$\boxed{\theta(t) = \frac{6}{5} + 2t - \frac{8}{3}e^{-2t} + \frac{22}{15}e^{-5t} \qquad (7)}$$

Reemplazando (7) en (3)

$$e(t) = 2\frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$\boxed{e(t) = 4 + \frac{32}{3}e^{-2t} - \frac{44}{3}e^{-5t} \qquad (8)}$$

Reemplazando (7) en (2)

$$2\,i(t) = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$i(t) = -\frac{16}{3}e^{-2t} + \frac{55}{3}e^{-5t} + 1 + \frac{8}{3}e^{-2t} - \frac{11}{3}e^{-5t}$$

$$\boxed{i(t) = 1 - \frac{8}{3}e^{-2t} + \frac{44}{3}e^{-5t} \qquad (9)}$$

Las funciones (7)-(9) conforman la solución al sistema.

Tarea complementaria:

a) Analice la solución obtenida. ¿Qué representan $\theta(t)$, $\theta'(t)$ y $\theta''(t)$ físicamente?
b) Si $t \to \infty$, ¿qué sucede con $\theta(t)$, $\theta'(t)$, $\theta''(t)$ e $i(t)$? ¿Por qué?

c) Reemplazar (3) en (1) y resolver el sistema conformado por la E.D. (2) y la nueva E.D. (1). ¿Qué relación hay entre las soluciones halladas?
d) Resolver nuevamente el sistema usando otra posición angular inicial. ¿Qué relación hay entre las soluciones del sistema? ¿Por qué sucede esto?
e) Replantear y resolver el sistema (1)-(2) usando como incógnitas a $\omega(t) = \theta'(t)$ e $i(t)$. ¿Qué relación hay con las soluciones halladas anteriormente?

Ejemplo de Aplicación: Redes

Una red eléctrica que tiene más de una malla da lugar a ecuaciones diferenciales simultáneas. Como se ve en la Figura 1 la corriente i_1 se divide en las direcciones que se muestran en el punto B_1llamado punto de ramificación de la red o nodo. Según la primera ley de Kirchhoff se puede escribir

$$i_1 = i_2 + i_3 \qquad (1)$$

Además, se puede aplicar la segunda ley de Kirchhoff a cada malla. Para la malla $A_1B_1B_2A_2A_1$, si sumamos la caída de voltaje a través en cada uno de sus elementos llegamos a

$$E(t) = i_1R_1 + L_1\frac{di_2}{dt} + i_2R_2 \qquad (2)$$

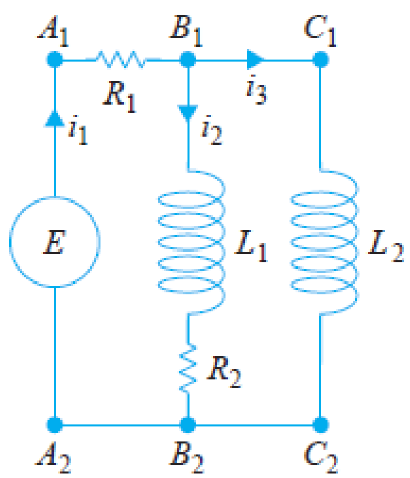


Figura 1

De igual manera para el circuito $A_1B_1C_1C_2B_2A_2A_1$ tenemos que

$$E(t) = R_1i_1 + L_2\frac{di_3}{dt} \qquad (3)$$

Usando la relación (1) en (2) para eliminar i_1 se tiene

$$E(t) = R_1(i_2 + i_3) + L_1\frac{di_2}{dt} + i_2R_2$$

$$E(t) = L_1\frac{di_2}{dt} + (R_2 + R_1)i_2 + R_1 i_3 \qquad (4)$$

Sustituyendo (1) en (3) se obtiene

$$E(t) = R_1(i_2 + i_3) + L_2\frac{di_3}{dt}$$

$$E(t) = R_1 i_2 + L_2\frac{di_3}{dt} + R_1 i_3 \qquad (5)$$

De esta forma se obtienen dos ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes para las corrientes i_2, i_3 (4) y (5) que se cumplen en forma simultánea. Luego podemos escribir el sistema

$$\left\{\begin{aligned} \boldsymbol{L_1\frac{di_2}{dt} + (R_2 + R_1)i_2} \qquad \qquad & \boldsymbol{+ R_1 i_3 = E(t)} \\ \boldsymbol{R_1 i_2 + L_2\frac{di_3}{dt}} & \boldsymbol{+ R_1 i_3 = E(t)} \end{aligned}\right. \qquad \boldsymbol{(6)}$$

Tarea complementaria:

Resolver el sistema sabiendo que las corrientes iniciales son nulas, que $R_1 = 2$, $R_2 = 3$, $L_1 = L_2 = 1$, $E(t) = 25e^{-6t}$.

Ejemplo de Aplicación: Sistema de 2 masas y 3 resortes

Sean tres resortes y dos masas colocados como en la Figura 2, estudiar su movimiento.
Suponemos que deslizan sobre una superficie horizontal y lisa, por lo que despreciamos la fuerza de rozamiento. Por tanto, las únicas fuerzas a tener en cuenta son las fuerzas de recuperación elástica de los resortes.
Las coordenadas x_1, x_2 posicionan a las masas m_1, m_2, siendo la posición de equilibrio, $x_1 = 0, x_2 = 0$ cuando los resortes K_1, K_2, K_3 permanecen sin estiramiento ni compresión

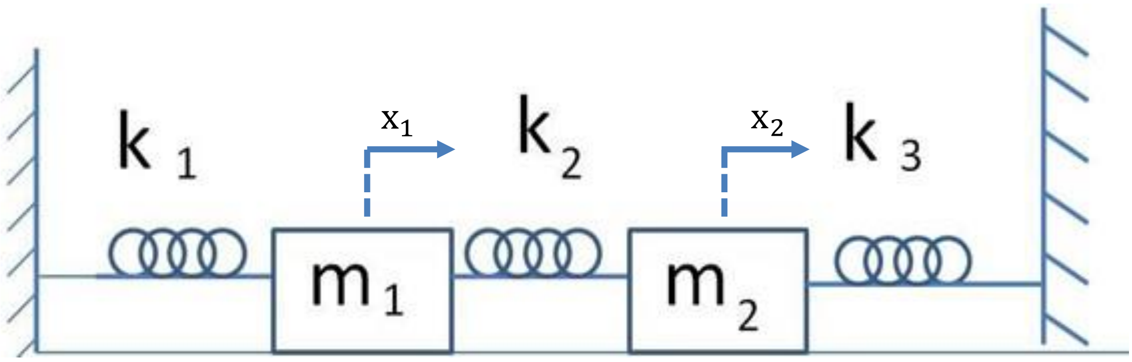


Figura 2

Se analiza el caso en que $x_2 > x_1$, es cuando K_1 está estirado la distancia x_1 , K_2 está estirado $x_2 - x_1$, y K_3 está comprimido x_2. Teniendo en cuenta la ley de Hooke, la fuerza ocasionada por cada resorte es proporcional a su elongación. Luego:

- Sobre la masa m_1 actúa la fuerza del resorte K_1 que tiende a contraerse ejerciendo una fuerza hacia la izquierda $K_1 x_1$. El resorte K_2 también se contrae tirando hacia la derecha con una fuerza $K_2(x_2 - x_1)$. Aplicando la segunda ley de Newton tenemos

$$m_1 \ddot{x}_1 = -K_1 x_1 + K_2(x_2 - x_1) \qquad (7)$$

- Sobre la masa m_2 actúan los resortes K_2 y K_3. El resorte K_2 tira hacia la izquierda ejerciendo una fuerza $K_2(x_2 - x_1)$ y al estirarse el resorte K_3 empuja a la masa m_2 también hacia la izquierda, con una fuerza $K_3 x_2$, quedando la ecuación de movimiento

$$m_2 \ddot{x}_2 = -K_2(x_2 - x_1) - K_3 x_2 \qquad (8)$$

Las ecuaciones (7) y (8) determinan las ecuaciones de movimiento del sistema dado mediante un sistema de E.D.L. de orden 2 con coeficientes constantes dado por

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -K_1 x_1 + K_2(x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -K_2(x_2 - x_1) - K_3 x_2 \end{cases}$$

Tarea complementaria:

Resolver el sistema sabiendo que

$m_1 = m_2 = k_2 = 1$; $k_1 = k_3 = 2$; $x_1(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 1$; $x_2(0) = 3$.