Universidad Nacional de San Juan

Facultad de Ingeniería

MATEMÁTICA APLICADA

Ingeniería Mecánica
Ingeniería Electromecánica

Equipo de Cátedra

Profesor Titular	Dr. Javier Gimenez
Profesor Adjunto	Dr. Emanuel Tello
Jefe de Trabajos Prácticos	Mg. Juan Pablo Llarena

AÑO 2024

CÁLCULO DE VARIACIONES

INTRODUCCIÓN

Imagina tener la habilidad de encontrar las trayectorias más eficientes para el movimiento de un cohete en el espacio, la forma óptima de un puente para soportar la carga máxima o incluso la trayectoria de un haz de luz que viaja entre dos puntos. Todo esto y más es posible gracias al cálculo variacional.

El cálculo variacional es una poderosa herramienta matemática que nos permite encontrar las funciones que maximizan o minimizan funcionales, que son expresiones que involucran integrales de funciones. Estas funciones pueden representar la energía, el área, el tiempo, o cualquier otra cantidad física o ingenieril de interés. A través del cálculo variacional, nos sumergimos en el reino de las curvas y superficies óptimas, desafiando nuestra comprensión de la naturaleza y buscando soluciones que optimicen la realidad que nos rodea.

El cálculo variacional tiene sus raíces en la mecánica clásica, pero su aplicación se extiende a campos tan diversos como la ingeniería, la física, la economía y la biología. Desde la antigüedad, brillantes mentes como Euler, Lagrange y Hamilton sentaron las bases de esta fascinante disciplina, y hoy en día, continúa siendo un área de investigación activa con aplicaciones modernas en ciencias e ingeniería.

A lo largo de este curso, exploraremos las ecuaciones de Euler-Lagrange, la piedra angular del cálculo variacional, que nos guiarán en la búsqueda de soluciones óptimas para una amplia variedad de problemas. Aprenderemos cómo se pueden describir fenómenos complejos mediante simples principios de mínimos y máximos y cómo estas ideas fundamentales son esenciales para entender y resolver problemas del mundo real.

Definiciones

Funcionales:

Se llaman **funcionales** a las correspondencias entre funciones y números reales"

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{J}:\ \mathcal{F} & \to & \mathbb{R} \\ y(x) & \to & n^0 \end{array}$$

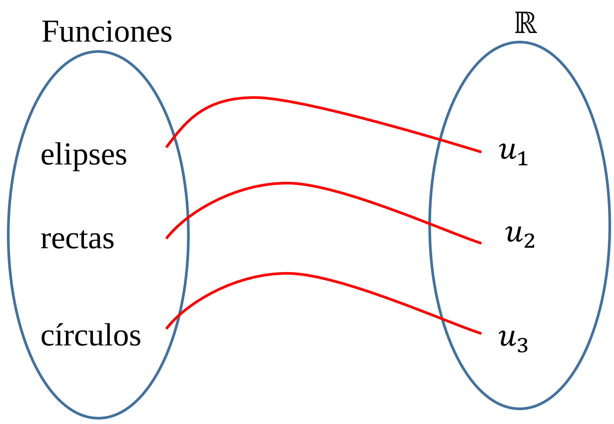


Figura 1

Problema Variacional

Un problema Variacional es aquel en el que se busca el máximo o el mínimo de un funcional del estilo por ejemplo

$$\mathcal{J}(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

Cálculo Variacional

Es la disciplina de la Física-Matemática que busca resolver problemas variacionales.

Problemas Introductorios:

Problema de la trayectoria mínima (o Geodésicas):

Dados dos puntos $P_0 = (x_0, y_0)$ y $P_1 = (x_1, y_1)$, hallar la curva C de longitud mínima que une estos puntos.

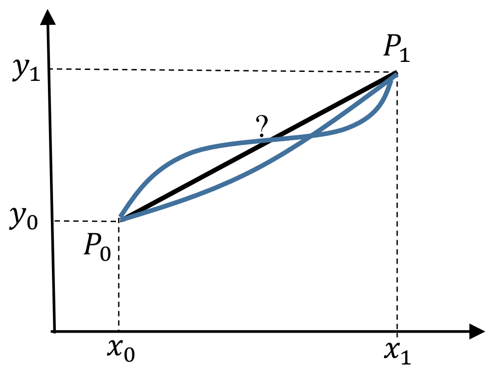


Figura 2

Sabemos que el segmento es la curva buscada, pero usemos este problema como una primera aproximación al problema variacional, y con la misma verifiquemos que el resultado final es en realidad un segmento.

En otras palabras, lo que buscamos es una curva C dada de forma explícita como una función $y = y(x)$ tal que la longitud de C sea mínima.

Por Cálculo II sabemos que la longitud de C viene dada por

$$\ell = \int_C ds = \int_{x_0}^{x_1} \|\vec{r}'(x)\| dx$$

donde $\vec{r}(x) = (x, y(x)),\ x_0 \leq x \leq x_1$, es una parametrización de C.

Luego $\vec{r}'(x) = \big(1, y'(x)\big)$, y por ende

$$\ell = \mathcal{J}(y) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Luego el problema a resolver consiste en hallar cual es la función $y = y(x)$ que minimiza este funcional sujeto a las condiciones de contorno $y_0 = y(x_0),\ y_1 = y(x_1)$. En este caso

$$F(x, y, y') = F(y') = \sqrt{1 + y'^2}$$

Más adelante veremos cómo resolver este problema.

Problema del cable suspendido:

Encontrar la forma que adopta un cable sometido a la **acción de la gravedad** (única fuerza que actúa sobre el cable), amarrado en sus extremos. Se supone que el cable es flexible, uniforme con densidad ($\lambda = \frac{dm}{ds}$) constante. Además, es inextensible.

La pregunta es ¿Cuál será la forma que adopta el cable?

Las condiciones son:

- Se considera que actúa sobre el cable solamente la fuerza de la gravedad
- El cable es flexible
- Uniforme con densidad constante
- Inextensible

- Amarrados en sus extremos

Solución

La forma que adopta el cable es la que hace que se acumule la mínima energía potencial a lo largo del cable. Equivalentemente, la forma que adopta el cable es la que hace que el centro de gravedad esté lo más abajo posible, o sea, lo más cercano a la tierra posible.

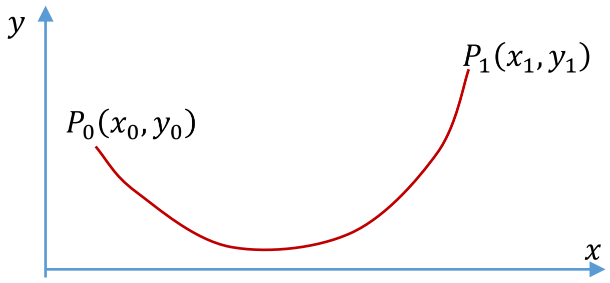


Figura 3

Supongamos que el cable toma la forma dada por la curva C dada por la gráfica de la función $y = y(x)$. Según lo visto en Cálculo II, tenemos que

$$y_G = \frac{\int_C y\,dm}{\int_C dm} = \frac{\lambda \int_C y\,ds}{\lambda \underbrace{\int_C ds}_{\ell \text{ cte}}} = \frac{1}{\ell}\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Como la constante $\frac{1}{\ell}$ no influyen en el mínimo, se obtiene la siguiente conclusión:

Conclusión

La curva que hace mínima la Energía Potencial de un cable suspendido amarrado en sus extremos se llama catenaria y matemáticamente es la curva $y = y(x)$ que hace mínima la integral

$$\mathcal{J}(y) = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Nota: En general no interesa el valor mínimo de la energía potencial E_p sino la curva que hace mínimo la integral.

Problema de la braquistócrona:

Encontrar la curva que une dos puntos P_0 y P_1 que tiene la particularidad de que si una cuenta (perlita de un collar) se suelta en P_0, entonces llega a P_1 en tiempo mínimo. Se asume que sólo actúa la gravedad y se desprecia el rozamiento.

Planteo Matemático:

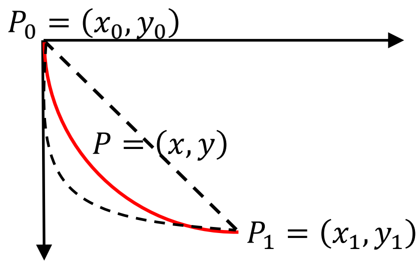


Figura 4

Si consideramos la velocidad que lleva la cuenta al desplazarse desde P_0 a P_1

$$V = \frac{ds}{dt} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{ds}{V} \quad \Rightarrow \quad t = \int \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{V} dx$$

La expresión de la velocidad la deducimos usando la ley de la conservación de la energía mecánica.

Energía cinética + Energía potencial = cte

En P_0: $E_p = 0$; $E_c = 0$ En P: $E_p = -mgy$; $E_c = \frac{1}{2} mV^2$

Igualando

$$0 = -mgy + \frac{1}{2} mV^2 \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{2gy}$$

Remplazando en la expresión de t

$$t = \int \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} dx$$

Por lo tanto, ignorando la constante, debemos hallara la curva $y = y(x)$ que haga mínimo a la funcional

$$t = \mathcal{J}(y) = \int \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}dx$$

A continuación aprenderemos a resolver problemas variacionales en general, para luego aplicar dichos procedimientos a estos problemas particulares.

FUNCIONALES DE LA FORMA

$$\mathcal{J}(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx \qquad (1)$$

Dado un funcional de la forma dada en (1) con F diferenciable de segundo orden, nos planteamos hallar la función $y(x)$ que optimize (1), esto es, la función $y(x)$ que al reemplazarla en el funcional se obtenga un valor $\mathcal{J}(y)$ máximo o mínimo.

Por lo general, la solución a este problema depende de constantes de integración, las cuales se determinan a partir de condiciones de contorno. Asumiremos las condiciones de contorno $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$.

Consideremos arbitrariamente una función $u = u(x)$ diferenciable y acotada en el intervalo de integración $[x_0, x_1]$, que se anula en los extremos, esto es: $u(x_0) = u(x_1) = 0$. Luego las funciones $y(x) \pm \varepsilon.u(x)$, con $\varepsilon > 0$ tan chico como sea necesario, están tan cercanas a $y(x)$ como se quiera (ver Figura 5). Además, estas funciones verifican las condiciones de contorno, ya que

$$y(x_0) \pm \varepsilon.u(x_0) = y_0$$

$$y(x_1) \pm \varepsilon.u(x_1) = y_1$$

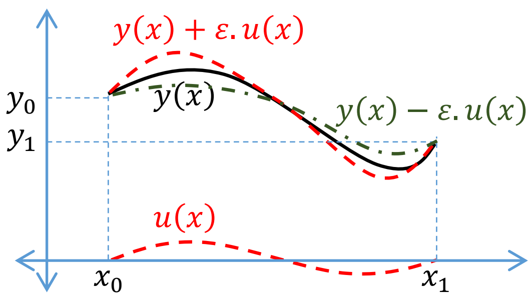


Figura 5

Luego, $y(x)$ es un máximo (mínimo) del funcional $\mathcal{J}(y)$ si para cualquier $u(x)$ la función

$$\Gamma(\varepsilon) = \mathcal{J}(y + \varepsilon u) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \varepsilon u, y' + \varepsilon u')dx$$

tiene un máximo (mínimo) en $\varepsilon = 0$.

Por lo que, una condición necesaria para que $y(x)$ sea una función extremal de $\mathcal{J}(y)$ es que Γ tenga un mínimo en $\varepsilon = 0$, y para ello se necesita que $\Gamma'(0) = 0$.

$$\Gamma'(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{d\varepsilon} F(x, y + \varepsilon u, y' + \varepsilon u')dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, y + \varepsilon u, y' + \varepsilon u')u + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y + \varepsilon u, y' + \varepsilon u')u' \right) dx$$

donde en la última igualdad se aplicó la regla de la cadena.

Evaluando en $\varepsilon = 0$, resulta

$$0 = \Gamma'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, y')u + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y')u' \right) dx \qquad (2)$$

Integrando por partes el segundo término resulta

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y')u' dx = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, y')u \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} u \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y')\, dx$$

El primer término de esta expresión es nulo ya que $u(x_0) = u(x_1) = 0$, resultando

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y')u' dx = -\int_{x_0}^{x_1} u \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y')\, dx \qquad (3)$$

Nota: Existen versiones del problema variacional que trabajan sin considerar las condiciones de contorno dejando los extremos libres. Esto exige condiciones necesarias extras con el fin de anular el primer término de (3). Estas condiciones son aplicadas sobre $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, y')$ y se las conoce como Condiciones Transversales. Esta extensión no será tratada en este curso por cuestiones de tiempos, pero su tratamiento es muy similar a lo que haremos en el curso.

Continuando con el desarrollo, si reemplazamos (3) en (2) resulta que

$$\int_{x_0}^{x_1} u(x) \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, y') - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y') \right) dx = 0.$$

Como $u(x)$ fue elegida arbitrariamente, resulta que una condición necesaria para que $y(x)$ sea una función extremal de $\mathcal{J}(y)$ es que

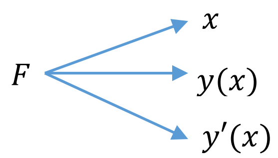
$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \qquad (4)$$

Esta ecuación se conoce como Ecuación de Euler (EE).

También usamos la notación

$$F_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = 0$$

Aclaración: $F(x, y, y')$ es la función integrando de $\mathcal{J}(y)$ y se considera que es función de 3 variables x, y, y' como si fuesen independientes.



- $\frac{\partial F}{\partial y} = F_y$ se deriva respecto a y ($x =$ cte, $y' =$ cte)
- $\frac{\partial F}{\partial y'} = F_{y'}$ se deriva respecto a y' ($x =$ cte, $y =$ cte)
- $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$ es derivada total, se considera a $y(x)$ e $y'(x)$ funciones de x

---

Nota: Cuando calculo $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$ debo recordar que y e y' son funciones de x.

<u>Ejemplo 1</u>: Hallar la Ecuación de Euler correspondiente a

$$F(x, y, y') = xy^2 - y^2y'^2$$

Calculemos las derivadas que forman parte de la E.E.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2xy - 2yy'^2$$
$$\frac{\partial F}{\partial y'} = -2y^2y'$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = -2(2yy'^2 + y^2y'')$$

Reemplazando estas expresiones en (4)

$$2xy + 2yy'^2 + 2y^2y'' = 0 \qquad E.E.$$

<u>Ejemplo 2:</u> Hallar la E.E. de

$$F = xy' - y'^2y$$

Calculemos las derivadas que forman parte de la E.E.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -y'^2$$
$$\frac{\partial F}{\partial y'} = x - 2yy'$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 1 - 2y''y - 2y'^2$$

Reemplazando estas expresiones en (4)

$$y'^2 - 1 + 2y''y = 0 \qquad E.E.$$

Nota: La Ecuación de Euler (4) conduce a una ecuación diferencial ordinaria (E.D.O.) de segundo orden que hay que resolver en cada caso. Las EDO resultantes en los ejemplos anteriores son cuadráticas en y', lo cual dificulta su resolución analítica. En muchas ocasiones se debe recurrir a soluciones por intermedio de métodos numéricos. Más adelante veremos expresiones alternativas de EE que permiten resolver analíticamente algunos casos en los que (4) produce una EDO de difícil resolución analítica.

La solución de E.D.O. se llama **extremal**, solamente entre las **extremales** existe la solución “que hace mínimo o máximo al funcional $\mathcal{J}$”.

Aquellas extremales que cumplan las condiciones de contorno se llaman **solución única** del problema.

<u>Ejemplo 3</u>: Hallar la función que optimiza el valor de la siguiente integral y que cumple las condiciones de contorno indicadas.

$$\begin{cases} \mathcal{J}(y) = \int_0^1 (xy - y'^2)\, dx \\ \quad y(0) = 0 \\ \quad y(1) = 1 \end{cases}$$

$$F = xy - y'^2$$

$$F_y = x \qquad F_{y'} = -2y' \qquad \frac{d}{dx}F_{y'} = -2y''$$

luego la E.E. es

$$x + 2y'' = 0 \quad \text{E.D.O. de segundo orden}$$

$$y'' = -\frac{x}{2}$$

Integramos miembro a miembro dos veces:

$$y' = -\frac{x^2}{4} + C_1$$

$$y = -\frac{x^3}{12} + C_1 x + C_2$$

Obtenemos una familia de extremales. Aplicando las condiciones de contorno

$$y(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = 0$$

$$y(1) = -\frac{1}{12} + C_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{13}{12}$$

Luego la solución única es:

$$y = -\frac{x^3}{12} + \frac{13}{12}x = \frac{x}{12}(13 - x^2)$$

<u>Solución al problema de la trayectoria mínima</u>:

Se debe hallar la función que optimiza

$$\ell = \mathcal{J}(y) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

sujeto a las condiciones de contorno $y_0 = y(x_0),\ y_1 = y(x_1)$.

$$F=\sqrt{1+y'^2} \qquad \Longrightarrow \qquad F_y=0 \qquad F_{y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

luego la E.E. es

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=C \quad \Longrightarrow \quad y'^2=C^2+C^2y'^2$$

$$\Longrightarrow \quad y'=\sqrt{\frac{C^2}{1-C^2}}=C_1 \quad \Longrightarrow \quad y=C_1x+C_2$$

Como esperábamos la solución es un trozo de recta o segmento ya que $x_0 \leq x \leq x_1$. Esto es, la curva por la que se minimiza el trayecto desde P_0 hasta P_1 es el segmento que los une. Usando las condiciones de contorno $y_0=y(x_0)$, $y_1=y(x_1)$, se obtiene la solución única, la cual es la conocida ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados

$$y=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)+y_0$$

Casos particulares de la Ecuación de Euler

a) $F=F(x,y')$ F no depende explícitamente de y

Como $F_y=0$, la ecuación de Euler (4) queda

$$\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)=0$$

Integrando a ambos miembros

$$\boxed{F_{y'}=C_1} \qquad (5)$$

La Ecuación de Euler en este caso está semi-integrada (o sea, es de primer orden y ya incluye una constante).

Ejercicio: Verificar que con (5) es más sencillo resolver el problema de la trayectoria mínima.

b) $F = F(y, y')$ F no depende explícitamente de x

En este caso, F no depende explícitamente de x, pero sin embargo, como depende de y y de y' que son funciones de x, resulta que F es función de x a través del siguiente esquema

$$\begin{tikzcd} & y \arrow[r] & x \\ F \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & y' \arrow[r] & x \end{tikzcd}$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}F = \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial y'}y''$$

Usando (4) resulta

$$\frac{d}{dx}F = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)y' + \frac{\partial F}{\partial y'}y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}y'\right) \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(F - \frac{\partial F}{\partial y'}y'\right) = 0$$

Integrando resulta la EE para el caso en que F no depende explícitamente de x:

$$\boxed{F - y'F_{y'} = C} \quad (6)$$

Observación: Tanto (5), como (6) son EDO de primer orden, o ecuaciones de segundo grado semi-integrada, ya que incluyen una cte.

<u>Otra Solución al problema de la trayectoria mínima</u>: Resolvamos nuevamente el problema pero esta vez usando (6). Recordemos que

$$F = \sqrt{1 + y'^2} \qquad \Rightarrow \qquad F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

Reemplazando en (6), resulta la siguiente E.E.

$$\sqrt{1 + y'^2} - y'\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C$$

Sacando común denominador y resolviendo

$$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = C \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C^2} = 1 + y'^2 \quad \Rightarrow \quad y' = \sqrt{\frac{1}{C^2} - 1} = C_1$$

$$\Rightarrow \quad y = C_1 x + C_2$$

Nuevamente concluimos que la curva por la que se minimiza el trayecto desde P_0 hasta P_1 es el segmento que los une. Si usamos las condiciones de contorno obtenemos la misma solución única.

Observación: La fórmula (6) es una alternativa a (4), pero no siempre es más conveniente, pero si $F = F(y, y')$ contiene al factor $\sqrt{1+y'^2}$ (caso común), la ecuación (6) nos permite aplicar un método de resolución que se explica en los siguientes ejemplos:

<u>Solución al problema del Cable Suspendido</u>

El funcional correspondiente es

$$F = y\sqrt{1+y'^2}$$

Como $F(y, y')$ usamos la Ecuación de Euler (6). Derivando:

$$F_{y'} = y\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Luego reemplazando en la E.E.

$$F - y'F_{y'} = C \quad \Rightarrow \quad y\sqrt{1+y'^2} - y'\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y(1+y'^2) - yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1$$

Luego la EDO a resolver es

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1 \qquad (*)$$

Nota: Generalmente cuando aparece el factor $\sqrt{1+y'^2}$ es conveniente hallar la curva C expresada de forma paramétrica $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

Para ello se suele suponer que y' es igual a $\operatorname{tg}(t)$, o igual a $\operatorname{cotg}(t)$, o igual a $\operatorname{senh}(t)$. Luego se da alguno de los siguientes casos respectivamente

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2(t)} = \sec(t)$$

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\operatorname{cotg}^2(t)} = \operatorname{cosec}(t)$$

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\operatorname{senh}^2(t)} = \cosh(t)$$

La práctica le indicará cuál de estas sustituciones es la más indicada para cada caso.

Para este problema usemos la sustitución $y' = \operatorname{senh}(t)$ en (*), luego

$$\frac{y}{\cosh(t)} = C_1 \qquad \Longrightarrow \qquad y = C_1 \cosh(t) \qquad (a)$$

Ya tenemos la expresión de $y = y(t)$, ahora debemos encontrar $x = x(t)$ para terminar de hallar la parametrización de la curva C óptima.

Teniendo en cuenta que $y' = \frac{dy}{dx}$. Despejando de esta expresión dx, reemplazando y' por la sustitución elegida, y diferenciando (a), se obtiene

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C_1 \operatorname{senh}(t)\, dt}{\operatorname{senh}(t)} = C_1 dt$$

Integrando miembro a miembro

$$x = C_1 t + C_2$$

<u>En resumen:</u> La solución óptima que da la forma adoptada por el cable expresada en forma paramétrica es

$$\begin{cases} x = C_1 t + C_2 \\ y = C_1 \cosh(t) \end{cases}$$

Es posible hallar la solución de forma explícita aplicando sustitución con el fin de eliminar a t de la expresión.

$$y = C_1 \cosh\left(\frac{x - C_2}{C_1}\right)$$

Esta solución es conocida como **catenaria** (de cadena).

C_1 y C_2 se determinan de las condiciones de contorno del problema. Un punto importante a tener en cuenta es que el vértice de la catenaria es el punto (C_2, C_1).

Ejercicio: Resolver nuevamente el problema, pero esta vez usando las sustituciones $y' = \mathrm{tg}(t)$ o $y' = \mathrm{cotg}(t)$ para verificar que si no se elige bien la sustitución a emplear puede que aparezca en el proceso de resolución una integral compleja de calcular. Esto causa que se encuentre la misma solución pero expresada de forma paramétrica de un modo más rebuscado.

Solución al problema de la Braquistócrona (Curva de tiempo mínimo)

Ya vimos que el Funcional para la Braquistócrona es

$$F(y, y') = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}$$

La parcial respecto de y' es

$$F_{y'} = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

Reemplazando en (6) se obtiene la siguiente ecuación de Euler:

$$\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y}\ \sqrt{1 + y'^2}} = \frac{(1 + y'^2) - y'^2}{\sqrt{y}\ \sqrt{1 + y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{y}\ \sqrt{1 + y'^2}} = C$$

Luego la EDO a resolver es

$$y = \frac{C_1}{1 + {y'}^2}$$

Si sustituimos $y' = \mathrm{cotg}(t)$ resulta

$$y = \frac{C_1}{\mathrm{cosec}^2(t)} = C_1 \mathrm{sen}^2(t)$$

Luego,

$$dy = 2C_1\operatorname{sen}(t)\cos(t)\,dt$$

por lo que

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2C_1\operatorname{sen}(t)\cos(t)\,dt}{\frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)}} = 2C_1\operatorname{sen}^2(t)dt = C_1(1-\cos(2t))dt$$

Integrando

$$x = C_1\left(t - \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} + C_2\right) = \frac{C_1}{2}(2t - \operatorname{sen}(2t) + C_2)$$

La solución expresada en forma paramétrica es

$$\begin{cases} x = \dfrac{C_1}{2}(2t - \operatorname{sen}(2t)) + C_2 \\ y = \dfrac{C_1}{2}(1 - \cos(2t)) \end{cases}$$

Si la bolita comienza tu recorrido en el punto $P_0 = (0,0)$, entonces

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

Llamando $2t = \theta$ y $\frac{C_1}{2} = R$ queda finalmente la ecuación paramétrica de la Cicloide

$$\begin{cases} x = R(\theta - \operatorname{sen}(\theta)) \\ y = R(1 - \cos(\theta)) \end{cases}$$

La otra condición (que pase por P_1) nos permite calcular R.

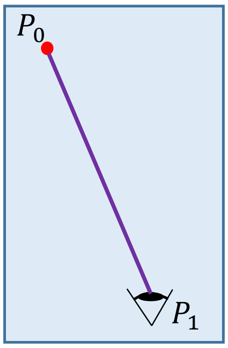
Aunque es posible eliminar θ y hallar una solución expresada de forma explícita, no es conveniente, pues es más fácil de interpretar la solución en forma paramétrica.

<u>Principio de Fermat</u>

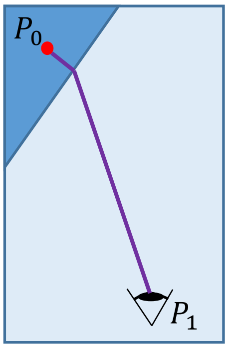
"La luz tiene prisa por llegar"

La luz se propaga de un punto $P_0(x_0, y_0)$ a otro $P_1(x_1, y_1)$ siguiendo el camino del mínimo tiempo.

Si el medio es homogéneo, entonces sigue una trayectoria recta



Si el medio no es homogéneo, entonces su trayectoria optimiza tiempos



Consideremos el caso 2D por simplicidad.

En cada punto (x, y) del medio la luz tiene una velocidad $V(x, y)$.

Además, buscamos la curva C que sigue la luz desde P_0 hasta P_1 que optimiza el tiempo.

Asumamos que esta curva se puede representar explícitamente como $y = y(x)$.

Luego, la curva se puede parametrizar como $\vec{r}(x) = \big(x, y(x)\big),\ x_0 \leq x \leq x_1$.

La velocidad es inversamente proporcional al tiempo, por lo que buscamos optimizar

$$t = \mathcal{J}(y) = \int_C \frac{1}{V(x, y)} ds = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{V(x, y)} dx$$

Observación: Para el caso de medio isotrópico, esto es $V = \text{cte}$, la trayectoria coincide con la geodésica, es decir, la luz se propaga siguiendo líneas rectas.

Ejercicio: Encontrar la trayectoria de un rayo de luz para los siguientes casos:

a) $V = x$ b) $V = y$ c) $V = \sqrt{y}$ d) $V = \frac{1}{\sqrt{y}}$ e) $V = \frac{1}{y}$ f) $V = V(y)$

Solución:

a) Reemplazando la velocidad $V = x$ en el Funcional, resulta:

$$F = F(x, y') = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{x}$$

$$F_{y'} = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{x\sqrt{1 + y'^2}} = \text{cte}$$

Sustituimos $y' = \text{tg}(t)$ resulta

$$\frac{\text{tg}(t)}{x \sec(t)} = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad x = C_1 \text{sen}(t)$$

Luego, $dx = C_1 \cos(t) dt$, y por ende

$$dy = y' dx = \frac{\text{sen}(t)}{\cos(t)} C_1 \cos(t) dt = C_1 \text{sen}(t) dt$$

Integrando miembro a miembro

$$y = -C_1 \cos(t) + C_2$$

Luego la solución en forma paramétrica es

$$\begin{cases} x = C_1 \text{sen}(t) \\ y = -C_1 \cos(t) + C_2 \end{cases}$$

La solución de forma implícita de la circunferencia se obtiene eliminando t de ambas ecuaciones, resultando una familia de circunferencias de ecuación

$$x^2 + (y - C_2)^2 = C_1^2$$

Respuestas para los otros valores de la velocidad:

b) Familia de circunferencias

c) Familia de cicloides

d) Familia de parábolas

e) Familia de catenarias

f) Depende el caso

<u>Aceleración de una masa:</u>

Se acelera una masa m que está en reposo, hasta llevarla a velocidad v_f en un tiempo T.

Se quiere minimizar la cantidad de combustible consumido por la maquina impulsora, cuyo gasto ($^{\text{gr}}/_{\text{seg}}$) es proporcional al cuadrado de la fuerza $f(t)$ ejercida sobre la masa. Suponer que la resistencia (cte. de frotamiento β) es proporcional a la velocidad.

Encontrar la evolución de la velocidad $v(t)$ que optimiza el consumo.

Solución: Se debe aplicar la Ecuación de Newton

$$\text{Ecuación de Newton :} \quad m\frac{dv}{dt} + \beta v = f(t)$$

Si M es la masa de combustible, entonces

$$\text{Gasto} = \frac{dM}{dt} = kf^2(t)$$

$$M = \int dM = \int_0^T kf^2(t)\,dt$$

El funcional a optimizar resulta ser

$$M = \mathcal{J}(v) = \int_0^T k(m\dot{v} + \beta v)^2\,dt$$

Las condiciones iniciales son

$$v(0) = 0$$
$$v(T) = v_f$$

Ejercicio: Demostrar que la solución del problema de la aceleración de una masa es

$$v(t) = \frac{v_f}{\operatorname{senh}\left(\frac{\beta}{m}T\right)}\operatorname{senh}\left(\frac{\beta}{m}t\right)$$