Universidad Nacional de San Juan

Facultad de Ingeniería

MATEMÁTICA APLICADA

Ingeniería Mecánica
Ingeniería Electromecánica

Equipo de Cátedra

Profesor Titular	Dr. Javier Gimenez
Profesor Adjunto	Dr. Emanuel Tello
Jefe de Trabajos Prácticos	Mg. Juan Pablo Llarena

AÑO 2024

Funcionales que dependen de derivadas de mayor orden

Objetivo: Extenderemos lo visto para el caso general en el que el funcional queda en función no solamente de la derivada primera, sino también de las derivadas de mayor orden. Esto es

$$\mathcal{J}(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', y''', \dots . y^{(m)})\, dx$$

Las condiciones de contorno consideradas son:

$$y(x_0) = y_0 \qquad y'(x_0) = y_{10} \qquad y''(x_0) = y_{20} \quad \dots \quad y^{(m-1)}(x_0) = y_{(m-1)0}$$

$$y(x_1) = y_1 \qquad y'(x_1) = y_{11} \qquad y''(x_1) = y_{21} \quad \dots \quad y^{(m-1)}(x_1) = y_{(m-1)1}$$

Es decir, se dan los valores de las funciones en las fronteras y de sus derivadas hasta un orden $m - 1$.

Para este caso, la ecuación de Euler es:

$$\boxed{F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) + \frac{d^2}{dx^2}(F_{y''}) + \cdots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m}\left(F_{y^{(m)}}\right) = 0}$$

Demostración: Haremos la prueba para el caso particular en que el funcional a optimizar sea

$$\mathcal{J}(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'')\, dx$$

La prueba para el caso general se extiende trivialmente.

Las condiciones de contorno para este caso son:

$$y(x_0) = y_0 \qquad y'(x_0) = y_{10}$$

$$y(x_1) = y_1 \qquad y'(x_1) = y_{11}$$

Consideremos arbitrariamente una función $u = u(x)$ diferenciable al menos dos veces y acotada en el intervalo de integración $[x_0, x_1]$ tal que:

$$u(x_0) = u(x_1) = u'(x_0) = u'(x_1) = 0$$

Luego las funciones $y(x) \pm \varepsilon . u(x)$, con $\varepsilon > 0$ tan chico como sea necesario, están tan cercanas a $y(x)$ como se quiera. Además, estas funciones verifican las condiciones de contorno, ya que

$$y(x_0) \pm \varepsilon . u(x_0) = y_0 \qquad\qquad y'(x_0) \pm \varepsilon . u'(x_0) = y_{10}$$

$$y(x_1) \pm \varepsilon.u(x_1) = y_1 \qquad y'(x_1) \pm \varepsilon.u'(x_1) = y_{11}$$

Luego, $y(x)$ es un máximo (mínimo) del funcional $\mathcal{J}(y)$ si para cualquier $u(x)$ la función

$$\Gamma(\varepsilon) = \mathcal{J}(y + \varepsilon u)$$

tiene un máximo (mínimo) en $\varepsilon = 0$.

Por lo que, una condición necesaria para que $y(x)$ sea una función extremal de $\mathcal{J}(y)$ es que Γ tenga un mínimo en $\varepsilon = 0$, y para ello se necesita que $\Gamma'(0) = 0$.

$$\Gamma'(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{d\varepsilon} F(x, y + \varepsilon u, y' + \varepsilon u', y'' + \varepsilon u'')dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, y + \varepsilon u, y' + \varepsilon u', y'' + \varepsilon u'')u + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y + \varepsilon u, y' + \varepsilon u', y'' + \varepsilon u'')u'\right.$$

$$\left. + \frac{\partial F}{\partial y''}(x, y + \varepsilon u, y' + \varepsilon u', y'' + \varepsilon u'')u''\right) dx$$

Evaluando en $\varepsilon = 0$, y evitando escribir el argumento (x, y, y', y'') para simplificar la notación, resulta

$$0 = \Gamma'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} u + \frac{\partial F}{\partial y'} u' + \frac{\partial F}{\partial y''} u''\right) dx \qquad (1)$$

El segundo término se integra por partes y se usa la condición de contorno del mismo modo que se hizo en el caso de primer orden.

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y'} u' \, dx = \underbrace{\left(u \frac{\partial F}{\partial y'}\right)\Big|_{x_0}^{x_1}}_{\substack{=0 \text{ pues} \\ u(x_0)=u(x_1)=0}} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} u \, dx = -\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} u \, dx \qquad (2)$$

El tercer término se integra por partes dos veces resultando

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y''} u'' \, dx = \underbrace{\left(u' \frac{\partial F}{\partial y''}\right)\Big|_{x_0}^{x_1}}_{\substack{=0 \text{ pues} \\ u'(x_0)=u'(x_1)=0}} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y''} u' \, dx$$

$$= -\underbrace{\left(u \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\Big|_{x_0}^{x_1}}_{\substack{=0 \text{ pues} \\ u(x_0)=u(x_1)=0}} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} u \, dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} u \, dx \qquad (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1), resulta

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} u \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} \right) dx$$

Por la arbitrariedad de la función $u = u(x)$ se obtiene la siguiente identidad conocida como Ecuación de Euler para el caso de funcionales que dependen de derivadas de mayor orden dada por

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} = 0}$$

Ejemplo 1: Hallar la extremal de:

$$\mathcal{J}(y) = \int_0^1 (x + y'')^2 \, dx$$

si las condiciones de contorno son $\begin{cases} y(0) = 0 & y'(0) = 1 \\ y(1) = 1 & y'(1) = 1 \end{cases}$

Si aplicamos la E.E. para funcionales de derivadas de mayor orden para $m = 2$ queda

$$F_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(F_{y''}\right) = 0 \tag{1}$$

La expresión de $F(x, y, y', y'')$ es

$$F(x, y, y', y'') = (x + y'')^2$$

Calculando las derivadas se tiene:

$$F_y = 0 \qquad F_{y'} = 0 \qquad F_{y''} = 2(x + y'') \qquad \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = 0 \qquad \frac{d^2}{dx^2}\left(F_{y''}\right) = 2y^{IV}$$

Reemplazando en (1) se tiene:

$$y^{IV} = 0$$

Integrando miembro a miembro sucesivamente cuatro veces la solución es

$$y = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$$

Calculando la derivada para aplicar las condiciones de contorno resulta

$$y' = 3C_1x^2 + 2C_2x + C_3$$

Aplicando las condiciones iniciales se tiene:

$$\begin{cases} y(0) = C_4 = 0 \\ y(1) = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 1 \\ y'(0) = C_3 = 1 \\ y'(1) = 3C_1 + 2C_2 + C_3 = 1 \end{cases}$$

Sistema cuya solución es:

$$C_1 = C_2 = C_4 = 0 \qquad C_3 = 1$$

Luego la solución única es:

$$y = x$$

Ejemplo 2:

Estudiar la forma que adopta una cinta C rectilínea metálica flexible y uniforme, la cual está empotrada en sus extremos, y obligada a pasar por n puntos. Considerar pequeñas deformaciones y despreciar la influencia del peso.

La pregunta es ¿qué forma adopta?

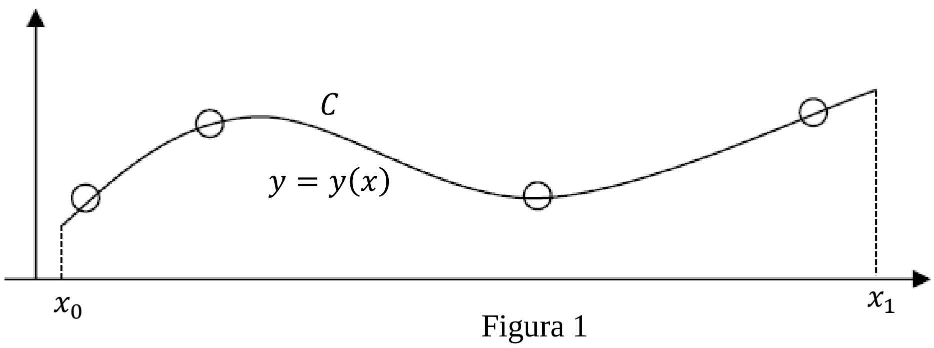

Figura 1

Obtención del Modelo Matemático

La forma que adopta la cinta es aquella que acumula menor energía potencial, o menor deformación a partir de la forma recta.

Esta deformación se mide con la variación espacial de la pendiente de la recta tangente cuantificada con y''.

Luego el funcional a optimizar es:

$$\mathcal{J}(y) = \int_{x_0}^{x_1} y''^2 dx$$

Nota: Si se multiplica este funcional por la constante de resistencia a la flexión se obtiene la energía potencial acumulada en la cinta.

Agreguemos al modelo las condiciones de contorno, las cuales vienen dadas por

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 & y'(x_0) = \tan\alpha \\ y(x_1) = y_1 & y'(x_1) = \tan\beta \end{cases}$$

Solución:

Aplicando la ecuación de Euler correspondiente se obtiene

$$\frac{d^2}{dx^2}(2y'') = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y'''' = 0$$

cuya solución general está conformada por polinomios de 3º grado dados por:

$$y = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$$

Note que para hallar las constantes se necesita de 4 condiciones de contorno. Si se le exige a $y = y(x)$ que pase por n puntos seguramente caeremos en un sistema de ecuaciones indeterminado. La solución a esto es hacer ajustes por tramos considerando de a dos puntos a la vez, y colocando como condiciones de contorno las dos restricciones que le exigen a la cinta pasar por los puntos contiguos, más dos restricciones que busquen que la cinta no muestre quiebres entre ajustes adyacentes. Para lograr esto, se existe que la derivada de los ajusten que se hacen a ambos lados de cada punto tengan la misma pendiente en el mencionado punto. Estas curvas se conocen como splines.

Funcionales que dependen de más de una función

Objetivo: Optimizar el funcional dependiente de varias funciones

$$\mathcal{J}(y_1, y_2) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, y_1', y_2')\, dx$$

con las Condiciones de Contorno correspondientes a cada una de las funciones:

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_{10} \qquad y_2(x_0) = y_{20} \\ y_1(x_1) = y_{11} \qquad y_2(x_1) = y_{21} \end{cases}$$

Se utiliza la Ecuación de Euler para cada función según corresponda a sus características de tal manera que se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$\text{Ecuación de Euler para } y_1 \qquad F_{y_1} - \frac{d}{dx}\left(F_{y_1'}\right) = 0$$

$$\text{Ecuación de Euler para } y_2 \qquad F_{y_2} - \frac{d}{dx}\left(F_{y_2'}\right) = 0$$

Demostración: Supongamos que y_1 e y_2 optimizan al funcional $\mathcal{J}(y_1, y_2)$. Consideremos arbitrariamente dos funciones $u_1 = u_1(x)$ y $u_2 = u_2(x)$ diferenciables y acotadas tales que

$$u_1(x_0) = u_1(x_1) = u_2(x_0) = u_2(x_1) = 0$$

Para $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño, las funciones $y_1 \pm \varepsilon u_1$, $y_2 \pm \varepsilon u_2$ son pequeñas variaciones de las funciones óptimas y_1, y_2 que satisfacen las condiciones de contorno.

Si consideramos la función

$$\Gamma(\varepsilon) = \mathcal{J}(y_1 + \varepsilon u_1, y_2 + \varepsilon u_2)$$

resulta necesario que $\Gamma'(0) = 0$. Luego

$$\Gamma'(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{d\varepsilon} F(x, y_1 + \varepsilon u_1, y_2 + \varepsilon u_2, y_1' + \varepsilon u_1', y_2' + \varepsilon u_2')dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y_1}(x, y_1 + \varepsilon u_1, y_2 + \varepsilon u_2, y_1' + \varepsilon u_1', y_2' + \varepsilon u_2')u_1 + \frac{\partial F}{\partial y_1'}(x, y_1 + \varepsilon u_1, y_2 + \varepsilon u_2, y_1' + \varepsilon u_1', y_2' + \varepsilon u_2')u_1' \right) dx +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y_2}(x, y_1 + \varepsilon u_1, y_2 + \varepsilon u_2, y_1' + \varepsilon u_1', y_2' + \varepsilon u_2')u_2 + \frac{\partial F}{\partial y_2'}(x, y_1 + \varepsilon u_1, y_2 + \varepsilon u_2, y_1' + \varepsilon u_1', y_2' + \varepsilon u_2')u_2' \right) dx$$

Luego, evaluando en $\varepsilon = 0$ y reduciendo notación como antes, resulta que

$$0 = \Gamma'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y_1} u_1 + \frac{\partial F}{\partial y_1'} u_1' \right) dx + \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y_2} u_2 + \frac{\partial F}{\partial y_2'} u_2' \right) dx$$

Integrando por partes y usando las condiciones de contorno al igual que cuando dedujimos las EE para una función incógnita, resulta

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} u_1 \left(\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_1'} \right) dx + \int_{x_0}^{x_1} u_2 \left(\frac{\partial F}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_2'} \right) dx$$

Como $u_1(x)$ y $u_2(x)$ fueron elegidas arbitrariamente, resulta que una condición necesaria para que el par de funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sean extremales de $\mathcal{J}(y_1, y_2)$ es que se verifiquen las EE planteadas para y_1 e y_2.

Ejemplo: Encontrar las extremales de

$$\mathcal{J}(y, z) = \int_0^{\pi/2} (y'^2 + z'^2 + 2yz) dx$$

Sabiendo que

$$y(0) = 0 \qquad y(\pi/2) = 1$$

$$z(0) = 0 \qquad z(\pi/2) = -1$$

<u>Solución</u>:

Se calcula la E.E. correspondiente a cada función

$$\begin{matrix} F_y - \dfrac{d}{dx}(F_{y'}) = 0 \\ F_z - \dfrac{d}{dx}(F_{z'}) = 0 \end{matrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} 2z - 2y'' = 0 \\ 2y - 2z'' = 0 \end{cases} \qquad \text{Sistema de EDO}$$

Para resolver el sistema se trabaja en forma análoga a como se trabaja con sistemas de ecuaciones algebraicas, aplicando por ejemplo el método de sustitución. Para ello, se despeja una función incógnita de una ecuación para reemplazarla en la otra con el fin de obtener como resultado una EDO en una sola variable, la cual debemos resolver aplicando los conocimientos de Cálculo II.

En este caso puedo despejar la función z de la primera y reemplazarla en la segunda ecuación. Elegimos la función a despejar de tal manera que, la operación a realizar en la segunda ecuación para obtener una EDO en una sola incógnita, sea derivación, nunca integración.

$$2z - 2y'' = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad z = y''$$

En la segunda ecuación aparece la derivada segunda de z, la cual se calcula derivando

$$z = y'' \qquad \Longrightarrow \qquad z'' = y''''$$

Reemplazando en la segunda ecuación se obtiene

$$2y - 2z'' = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 2y - 2y'''' = 0$$

Luego la EDO a resolver es con los métodos vistos en Cálculo II son:

$$2y - 2y'''' = 0$$

Resulta una EDO homogénea de cuarto orden cuya ecuación característica asociada es

$$r^4 - 1 = 0$$

Las raíces son: $r_{1,2} = \pm 1 \qquad r_{3,4} = \pm 1j$

Luego la solución General de la Homogénea es:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \operatorname{sen}(x) + C_4 \cos(x)$$

$$z = y'' = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \operatorname{sen}(x) - C_4 \cos(x)$$

Las constantes se obtienen reemplazando las condiciones de contorno

$$y(0) = 0 \qquad y(\pi/2) = 1$$

$$z(0) = 0 \qquad z(\pi/2) = -1$$

$$\left.\begin{array}{r} y(0) = 0 = C_1 + C_2 + C_4 \\ y(\pi/2) = 1 = C_1 e^{\pi/2} + C_2 e^{-\pi/2} + C_3 \\ z(0) = 0 = C_1 + C_2 - C_4 \\ z(\pi/2) = -1 = C_1 e^{\pi/2} + C_2 e^{-\pi/2} - C_3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad C_1 = 0 \quad C_2 = 0 \quad C_3 = 1 \quad C_4 = 0$$

La solución única del problema es

$$\begin{cases} y = \operatorname{sen}(x) \\ z = -\operatorname{sen}(x) \end{cases}$$

Ejercicio: Optimizar

$$\mathcal{J}(y,z) = \int_0^{\pi} (4y'^2 + z'^2 + 2yz - x^2)dx$$

usando las condiciones de contorno

$$\begin{cases} y(0) = 1 \qquad y(\pi) = 0 \\ z(0) = 8 \qquad z(\pi) = 0 \end{cases}$$

Principio de Hamilton

Principio de Hamilton de la acción mínima:

Considere un sistema mecánico (conservativo) con variables de estado $q = q(t)$, energía potencial V y energía cinética T. La evolución temporal de sus variables de estado entre los tiempos t_0 y t_1 será aquella que minimice la integral del Lagrangiano dado por $L = T - V$, esto es:

$$\mathcal{J}(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q})\, dt$$

Ejemplo 1: Sistema masa-resorte sin fricción

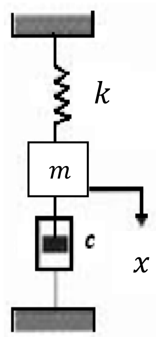

Figura 2

En un sistema masa resorte, la variable de estado $q = x$ es la posición de la masa relativa a su posición de equilibrio. Además, la expresión de la Energía Cinética está dada por

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

y de la Energía Potencial es

$$V = \frac{1}{2} kx^2$$

Según la definición del Lagrangiano

$$L(t, x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$$

Este Lagrangiano depende de t a través del desplazamiento x, y la velocidad $\dot{x}$.

Aplicando la E.E. se tiene

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

$$L_x = -kx$$

$$L_{\dot{x}} = m\dot{x} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d}{dt}(L_{\dot{x}}) = m\ddot{x}$$

Reemplazando en la EE

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Se llega a la misma ecuación de movimiento que se obtiene al aplicar las leyes de Newton.

Ejemplo 2: Péndulo simple

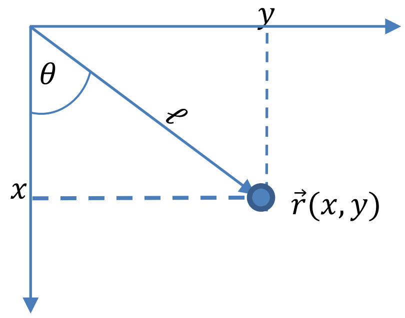

Figura 3

De la Figura 3 se obtienen las ecuaciones del vector posición $\vec{r}(x,y)$, donde ℓ es la longitud de la cuerda y θ el ángulo que forma la cuerda con el eje vertical "x". Teniendo en cuenta las relaciones trigonométricas se tiene que

$$\vec{r} = (x,y) = (\ell\cos(\theta), \ell\,\mathrm{sen}(\theta)) \qquad \theta = \theta(t)$$

$$\dot{\vec{r}} = \left(-\ell\ \mathrm{sen}(\theta)\,\dot{\theta}, \ell\cos(\theta)\,\dot{\theta}\right)$$

$$\left\|\dot{\vec{r}}\right\|^2 = \ell^2\dot{\theta}^2$$

Luego la Energía Cinética será

$$T = \frac{1}{2}m\left\|\dot{\vec{r}}\right\|^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

La Energía potencial es

$$V = -mg\ell\cos(\theta)$$

Luego la Lagrangiana resulta

$$L\left(t,\theta,\dot{\theta}\right) = T - V$$

$$L = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell\cos(\theta)$$

Aplicando la E.E. resulta

$$L_\theta = -mg\ell\ \mathrm{sen}(\theta)$$

$$L_{\dot{\theta}} = m\ell^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(L_{\dot{\theta}}\right) = m\ell^2\ddot{\theta}$$

Luego reemplazando en la E.E.

$$L_\theta - \frac{d}{dt}\left(L_{\dot{\theta}}\right) = 0$$

$$-mg\ell\ \mathrm{sen}(\theta) - m\ell^2\ddot{\theta} = 0$$

$$\ell\ddot{\theta} + g\,\mathrm{sen}(\theta) = 0$$

Normalizando la E.D.O. se obtiene

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\operatorname{sen}(\theta) = 0$$

Ecuación Diferencial no Lineal de segundo orden, que no se puede resolver analíticamente y se debe recurrir al auxilio de los Métodos Numéricos

Sin embargo, si suponemos pequeñas oscilaciones por ejemplo $\theta < {}^{\pi}/_{15} \cong 0.21$, para estos valores de θ se cumple que $\operatorname{sen}(\theta) \cong \theta$.

Por ejemplo para $\theta = 10° = 0.17365\, radianes \quad sen(10°) = 0.173648$

Entonces para pequeñas oscilaciones se puede reemplazar $\operatorname{sen}(\theta)$ por θ obteniendo

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

EDO Lineal de segundo orden con coeficientes constantes cuya solución es, teniendo en cuenta que las raíces de la ecuación característica son $\pm\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, i$,

$$\theta = \theta(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t\right)$$

En esta expresión la frecuencia angular es

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Luego el período del péndulo es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Note que si aumenta la longitud ℓ del péndulo, entonces el período T es mayor, y por ende, disminuye la frecuencia angular ω. Luego el péndulo se mueve más lento si se aumenta la longitud del péndulo.

Ejemplo 3: Péndulo articulado

De la figura 4 se puede expresar

$$x = \ell_1 \cos(\theta_1) + \ell_2 \cos(\theta_2)$$
$$y = \ell_1 \operatorname{sen}(\theta_1) + \ell_2 \operatorname{sen}(\theta_2)$$

$$\vec{r} = (\ell_1 \cos(\theta_1) + \ell_2 \cos(\theta_2)\,,\ \ell_1 \operatorname{sen}(\theta_1) + \ell_2 \operatorname{sen}(\theta_2))$$

$$\dot{\vec{r}} = \left(-\dot{\theta}_1 \ell_1 \operatorname{sen}(\theta_1) - \dot{\theta}_2 \ell_2 \operatorname{sen}(\theta_2)\ ,\dot{\theta}_1 \ell_1 \cos(\theta_1) + \dot{\theta}_2 \ell_2 \cos(\theta_2)\right)$$

$$\left\|\dot{\vec{r}}\right\|^2 = v^2 = \dot{\theta}_1^2 {\ell_1}^2 + \dot{\theta}_2^2 {\ell_2}^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \ell_1 \ell_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

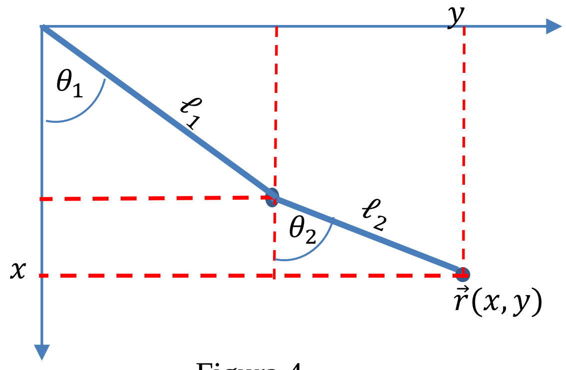

Figura 4

Por lo tanto, la expresión de la Energía Cinética y Potencial es

$$T = \frac{1}{2}m\|\dot{\vec{r}}\|^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{\theta}_1^2{\ell_1}^2 + \dot{\theta}_2^2{\ell_2}^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\ell_1\ell_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right)$$

$$V = -mg(\ell_1\cos(\theta_1) + \ell_2\cos(\theta_2))$$

$$L = T - V = L\left(t,\theta_1,\theta_2,\dot{\theta}_1,\dot{\theta}_2\right)$$

Ejercicio: Aplicar las Ecuaciones de Euler para modelar la evolución del sistema.

Caso General

En general

$$L = L(t, q_1, q_2, \ldots\ldots\ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots\ldots\ldots, \dot{q}_n)$$

donde las q_i se llaman coordenadas generalizadas. Estas variables pueden ser x, θ, o cualquier otra variable según la naturaleza del problema.

Luego las expresiones de la Energía Cinética y Potencial serán

$$T = T(t, q_1, q_2, \ldots\ldots., q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots\ldots.., \dot{q}_n)$$
$$V = V(t, q_1, q_2, \ldots\ldots., q_n)$$

Sabiendo que

$$L = T - V$$

Se aplica la E.E. para cada una de las funciones q_i

$$\frac{\partial}{\partial q_i}(T-V) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

Obteniendo un sistema de n - Ecuaciones de Euler y se llaman Ecuaciones de Lagrange.

También podemos usar otra notación

$$\left(T_{q_i} - V_{q_i}\right) - \frac{d}{dt}T_{\dot{q}_i} = 0$$

Ejercicio: Plantear y resolver las ecuaciones resultantes de aplicar el principio de Hamilton, para un sistema para el cual:

$$T = q_1 + \dot{q}_1{}^2 + \dot{q}_2{}^2$$
$$V = 2q_1q_2$$

$$L = q_1 + \dot{q}_1{}^2 + \dot{q}_2{}^2 - 2q_1q_2$$

Para q_1 la E.E. es

$$L_{q_1} = 1 - 2q_2 \qquad L_{\dot{q}_1} = 2\dot{q}_1 \qquad \frac{d}{dt}L_{\dot{q}_1} = 2\ddot{q}_1$$

$$L_{q_1} - \frac{d}{dt}L_{\dot{q}_1} = 0$$

$$1 - 2q_2 - 2\ddot{q}_1 = 0$$

$$\ddot{q}_1 + q_2 = \frac{1}{2}$$

Análogamente se procede para q_2 y se obtiene la E.E. correspondiente:

$$\ddot{q}_2 + q_1 = 0$$

Obteniendo el sistema de EDO:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + q_2 = \frac{1}{2} \\ \ddot{q}_2 + q_1 = 0 \end{cases}$$

Despejando de la primera ecuación q_2 y derivando dos veces, se reemplaza en la segunda ecuación obteniendo

$$q_2 = -\ddot{q}_1 + \frac{1}{2}$$

$$q_1'''' - q_1 = 0$$

Solución:

$$q_1 = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\,\mathrm{sen}(t) + C_4\cos(t)$$

$$q_2 = -C_1e^t - C_2e^{-t} + C_3\,\mathrm{sen}(t) + C_4\cos(t) + \frac{1}{2}$$

Ejercicio: Halle la evolución del sistema considerando las siguientes condiciones de contorno:

$$q_1(0) = 1 \qquad \dot{q}_1(0) = 0 \qquad q_2(0) = \frac{1}{2} \qquad \dot{q}_2(0) = 1$$