Universidad Nacional de San Juan

Facultad de Ingeniería

MATEMÁTICA APLICADA

Ingeniería Mecánica
Ingeniería Electromecánica

Equipo de Cátedra

Profesor Titular	Dr. Javier Gimenez
Profesor Adjunto	Dr. Emanuel Tello
Jefe de Trabajos Prácticos	Mg. Juan Pablo Llarena

AÑO 2024

Extremos Condicionados

Se denomina problema variacional condicionado cuando se debe optimizar un funcional de la forma

$$\mathcal{J}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')dx$$

Sujeto a las condiciones (restricciones, enlaces)

$$\phi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0 \qquad \forall i = 1, \dots, m < n$$

<u>Nota:</u> Cada ecuación ϕ_i baja un grado de libertad, por lo que el problema no tiene sentido para $m \geq n$.

Este problema se resuelve aplicando el método de Multiplicadores de Lagrange

Métodos multiplicadores de Lagrange

El Método consiste en construir una función auxiliar (Llamada Función de Lagrange)

$$F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \phi_i$$

donde los λ_i reciben el nombre de Multiplicadores de Lagrange.

Este problema así planteado tiene $m + n$ incógnitas: las n funciones y_j y los m multiplicadores de Lagrange.

Se plantean n ecuaciones de Euler, una para cada y_j

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y_j'} = 0 \qquad \forall j = 1, \dots, n$$

y se agregan m condiciones

$$\phi_i = 0 \qquad \forall i = 1, \dots, m$$

Formando un sistema de $m + n$ ecuaciones con $m + n$ incógnitas

$$\begin{cases} F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y_j'} = 0 & \forall\, j = 1, \dots, n \\ \phi_i = 0 & \forall\, i = 1, \dots, m \end{cases}$$

Observación

1) $m < n$ (nº de enlaces $<$ nº de funciones incógnitas)
2) $\lambda = \lambda(x)$ (Puede ser función de x, o constante , pero no es función de y ó y')

Demostración: La prueba de este método excede al objetivo del curso, sin embargo, esbozaremos una suponiendo dos variables y una restricción.

El objetivo es entonces optimizar el funcional

$$\mathcal{J}(y_1, y_2) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, y_1', y_2')dx$$

sujeto a la restricción

$$\phi\ (x, y_1, y_2, y_1', y_2') = 0$$

y a las condiciones de contorno

$$y_1(x_0) = y_{10} \qquad y_2(x_0) = y_{20} \qquad y_1(x_1) = y_{11} \qquad y_2(x_1) = y_{21}$$

Consideremos arbitrariamente dos funciones $u_1 = u_1(x)$ y $u_2 = u_2(x)$ diferenciables y acotadas tales que

$$u_1(x_0) = u_1(x_1) = u_2(x_0) = u_2(x_1) = 0$$

Además, asumamos que para $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño

$$\phi\ (x, y_1 \pm \varepsilon u_1, y_2 \pm \varepsilon u_2, y_1' \pm \varepsilon u_1', y_2' \pm \varepsilon u_2') = 0 \tag{1}$$

Las funciones $y_1 \pm \varepsilon u_1$, $y_2 \pm \varepsilon u_2$ son pequeñas variaciones de las funciones óptimas y_1, y_2 tales que:

- Satisfacen las condiciones de contorno
- Satisfacen la restricción

Luego, si consideramos la función

$$\Gamma(\varepsilon) = \mathcal{J}(y_1 + \varepsilon u_1, y_2 + \varepsilon u_2)$$

resulta que necesariamente $\Gamma'(0) = 0$. Derivando Γ y luego evaluando en $\varepsilon = 0$, se obtuvo anteriormente al analizar el problemas sin restricciones que:

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} u_1 \left(\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_1'}\right)dx + \int_{x_0}^{x_1} u_2 \left(\frac{\partial F}{\partial y_2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_2'}\right)dx \tag{2}$$

Acá se obtiene lo mismo con el mismo procedimiento, pero no se puede usar que las funciones u_i son totalmente arbitrarias ya que hay una dependencia entre ellas dada por la restricción (1). Luego

$$\begin{aligned}0 = \frac{d\phi}{d\varepsilon} = u_1 \frac{\partial \phi}{\partial y_1}&(x, y_1 + \varepsilon u_1, y_2 + \varepsilon u_2, y_1' + \varepsilon u_1', y_2' + \varepsilon u_2') \\ +u_1' \frac{\partial \phi}{\partial y_1'}&(x, y_1 + \varepsilon u_1, y_2 + \varepsilon u_2, y_1' + \varepsilon u_1', y_2' + \varepsilon u_2') \\ +u_2 \frac{\partial \phi}{\partial y_2}&(x, y_1 + \varepsilon u_1, y_2 + \varepsilon u_2, y_1' + \varepsilon u_1', y_2' + \varepsilon u_2') \\ +u_2' \frac{\partial \phi}{\partial y_2'}&(x, y_1 + \varepsilon u_1, y_2 + \varepsilon u_2, y_1' + \varepsilon u_1', y_2' + \varepsilon u_2')\end{aligned}$$

Evaluando en $\varepsilon = 0$, evitando el argumento $(x, y_1, y_2, y_1', y_2')$ por simplicidad, resulta

$$0 = u_1 \frac{\partial \phi}{\partial y_1} + u_1' \frac{\partial \phi}{\partial y_1'} + u_2 \frac{\partial \phi}{\partial y_2} + u_2' \frac{\partial \phi}{\partial y_2'}$$

Multipliquemos esta expresión por una nueva función $\lambda = \lambda(x)$ hasta el momento desconocida pero que determinaremos más adelante, e integremos:

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \left(u_1 \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y_1} + u_1' \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y_1'} \right) dx + \int_{x_0}^{x_1} \left(u_2 \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y_2} + u_2' \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y_2'} \right) dx$$

Análogamente a lo hecho anteriormente, integrando por partes los segundos términos y usando que las funciones u_i se anulan en x_0 y x_1, resulta que

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \left(\lambda \frac{\partial \phi}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{\partial \phi}{\partial y_1'} \right) \right) u_1 dx + \int_{x_0}^{x_1} \left(\lambda \frac{\partial \phi}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{\partial \phi}{\partial y_2'} \right) \right) u_2 dx \qquad (3)$$

Sumando (2) y (3), resulta

$$\begin{aligned}0 = \int_{x_0}^{x_1} u_1 \left(\left(\frac{\partial F}{\partial y_1} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y_1} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y_1'} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y_1'} \right) \right) dx \\ + \int_{x_0}^{x_1} u_2 \left(\left(\frac{\partial F}{\partial y_2} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y_2} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y_2'} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y_2'} \right) \right) dx\end{aligned}$$

Definiendo la función de Lagrange $F^* = F + \lambda \phi$ resulta

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} u_1 \left(\frac{\partial F^*}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F^*}{\partial y_1'} \right) dx + \int_{x_0}^{x_1} u_2 \left(\frac{\partial F^*}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F^*}{\partial y_2'} \right) dx \qquad (4)$$

Si bien solo una de las funciones u_i se puede elegir libremente, ahora contamos con la función λ que también podemos elegir libremente. Estos dos grados de libertad coinciden con la cantidad de integrales en (4), y esto a la larga nos permitirá concluir que de (4) surgen las EE con las que se resuelve el problema.

Hasta ahora no hemos fijado la función $\lambda = \lambda(x)$, por lo que la definiremos convenientemente con el fin de anular una de las integrales de (4). Supongamos que queremos anular la primera integral (el análisis considerando la segunda integral es análogo), para ello es suficiente con pedir que

$$\frac{\partial F^*}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F^*}{\partial y_1'} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y_1} + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial y_1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_1'} + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial y_1'}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda'\frac{\partial \phi}{\partial y_1'} + \lambda\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial y_1'} - \frac{\partial \phi}{\partial y_1}\right) = \frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_1'}$$

Luego, $\lambda = \lambda(x)$ se fija a partir de ahora como la solución de esta EDO lineal de primer orden. Luego (3) se reduce a

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} u_2\left(\frac{\partial F^*}{\partial y_2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F^*}{\partial y_2'}\right)dx$$

Ahora coinciden la cantidad de grados de libertad que tenemos $(n - m = 2 - 1 = 1)$ con la cantidad de integrales a anular.

Suponiendo que u_2 se elige libremente (luego u_1 se calcula usando la restricción), resulta que debemos exigir que

$$\frac{\partial F^*}{\partial y_2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F^*}{\partial y_2'} = 0$$

En otras palabras, en (4) teníamos dos integrales para anular. Una se anula definiendo la función $\lambda = \lambda(x)$ adecuadamente, y la otra se anuló gracias a que podíamos variar arbitrariamente a sólo una de las funciones: $u_1 = u_1(x)$ o $u_2 = u_2(x)$. Análogamente se podría haber anulado primero la segunda integral y luego la primera.

En ambos casos resulta que debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} F^*_{y_1} - \dfrac{d}{dx}F^*_{y_1'} = 0 \\ F^*_{y_2} - \dfrac{d}{dx}F^*_{y_2'} = 0 \\ \phi = 0 \end{cases}$$

El cual está compuesto por la restricción, y las EE para y_1 y para y_2 usando el funcional F^*.

Ejemplo 1: Hallar la extremal de

$$\mathcal{J}(y,z) = \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} + zy' + \frac{z'^2}{2}\right)dx$$

sujeta a

$$z - y' = 0$$

Con las condiciones: $y(0) = 1 \quad y(1) = e^{-1} \quad z(0) = -1 \quad z(1) = e^{-1}$

<u>Solución:</u>

$$F(x, y, z, y', z') = \frac{y^2}{2} + zy' + \frac{z'^2}{2}$$

$$\phi = z - y' = 0$$

Formamos la Función de Lagrange

$$F^* = F + \lambda\phi = \frac{y^2}{2} + zy' + \frac{z'^2}{2} + \lambda(z - y')$$

La E.E. correspondiente para y es

$$F_y^* - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}^*\right) = 0$$

$$F_y^* = y \qquad F_{y'}^* = z - \lambda \qquad \frac{d}{dx}\left(F_{y'}^*\right) = z' - \lambda'$$

Reemplazando en la E.E. queda

$$y - z' + \lambda' = 0$$

La E.E. correspondiente a z es:

$$F_z^* - \frac{d}{dx}\left(F_{z'}^*\right) = 0$$

$$F_z^* = y' + \lambda \qquad F_{z'}^* = z' \qquad \frac{d}{dx}\left(F_{z'}^*\right) = z''$$

Reemplazando en la E.E. queda

$$y' + \lambda - z'' = 0$$

Con las EE y la ecuación de ligadura se forma el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (y, z, λ)

$$\begin{cases} y - z' + \lambda' = 0 & (1) \\ y' + \lambda - z'' = 0 & (2) \\ z - y' = 0 & (3) \end{cases}$$

Para resolver el sistema conviene despejar λ de (2) y z de (3), derivar y reemplazar en (1), para que de esta manera todo queda en función de y

$$\begin{matrix} \lambda = z'' - y' \\ z = y' \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \lambda' = z''' - y'' = y^{IV} - y'' \\ z' = y'' \end{matrix}$$

Reemplazando estas expresiones en (1) resulta:

$$y - y'' + (y^{IV} - y'') = 0$$

$$y^{IV} - 2y'' + y = 0$$

Se obtiene una EDO lineal homogénea de orden cuatro, cuya ecuación característica es:

$$r^4 - 2r^2 + 1 = 0$$

$$(r^2 - 1)^2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{l} r_{1,2} = 1 \text{ (doble)} \\ r_{3,4} = -1 \text{ (doble)} \end{array}$$

La solución General será

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 x e^x + C_4 x e^{-x}$$

$$z = y' = (C_1 + C_3)e^x + (C_4 - C_2)e^{-x} + C_3 x e^x - C_4 x e^{-x}$$

Aplicando las Condiciones de Contorno

$$y(0) = 1 = C_1 + C_2$$

$$y(1) = e^{-1} = C_1 e + C_2 e^{-1} + C_3 e + C_4 e^{-1}$$

$$z(0) = -1 = C_1 + C_3 + C_4 - C_2$$

$$z(1) = -e^{-1} = C_1 e + C_3 e + C_4 e^{-1} - C_2 e^{-1} + C_3 e - C_4 e^{-1}$$

Resolviendo

$$C_1 = C_3 = C_4 = 0 \qquad\qquad C_2 = 1$$

La solución es

$$\boxed{\begin{cases} y = e^{-x} \\ z = -e^{-x} \end{cases}}$$

Ejemplo 2:

Hallar la extremal de

$$\mathcal{J}(y,z) = \int_0^1 (2z - y'z'')dx$$

sujeta a la condición $\qquad z' = y$

Siendo las Condiciones de Contorno

$$y(0) = z(0) = z(1) = 0 \qquad\qquad y(1) = 1/_{24}$$

<u>Solución:</u>

a) Se construye la Función de Lagrange

$$F^* = 2z - y'z'' + \lambda(z' - y)$$

b) Se forman las Ecuaciones de Euler

Para y

$$F_y^* - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}^*\right) = 0$$

$$-\lambda - (z'')' = 0$$

Para z

$$F_z^* - \frac{d}{dx}(F_{z'}^*) + \frac{d^2}{dx}(F_{z''}) = 0$$

$$2 - \lambda' - (y')'' = 0$$

c) Se forma el sistema con las Ecuaciones de Euler y la condición de Ligadura

$$\begin{cases} -\lambda + z''' = 0 & (1) \\ 2 - y''' - \lambda' = 0 & (2) \\ z' - y = 0 & (3) \end{cases}$$

Es conveniente despejar λ (recordar que es función de x) de (1), derivar y reemplazar en (2). Análogamente conviene despejar y de (3), derivar y reemplazar en (2). De esta manera resulta una EDO con una sola variable que es z

$$-\lambda + z''' = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = z''' \quad \Longrightarrow \quad \lambda' = z^{IV}$$

$$z' - y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = z' \quad \Longrightarrow \quad y''' = z^{IV}$$

Reemplazando estas expresiones en (2) obtenemos:

$$2 - y''' - \lambda' = 0$$

$$2 - z^{IV} - z^{IV} = 0$$

$$z^{IV} = 1$$

Integrando miembro a miembro respecto de x cuatro veces se obtiene

$$z = \frac{x^4}{24} + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$$

Reemplazando en la condición de ligadura

$$y = z' = \frac{x^3}{6} + 3C_1x^2 + 2C_2x + C_3$$

Usando las condiciones de contorno

$$z(0) = 0 = C_4 \quad \Longrightarrow \quad C_4 = 0$$

$$y(0) = 0 = C_3 \quad \Longrightarrow \quad C_3 = 0$$

$$\begin{cases} y(1) = \frac{1}{6} + 3C_1 + 2C_2 = \frac{1}{24} \\ z(1) = \frac{1}{24} + C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} C_1 = 0 \\ C_2 = -\frac{1}{24} \end{array}$$

La solución única del problema es

$$\begin{cases} z = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{24} = \frac{x^3(x-1)}{24} \\ y = \frac{x^6}{6} - \frac{1}{8}x^2 = \frac{x^2}{24}(4x-3) \end{cases}$$

Ejercicio: Optimizar

$$\mathcal{J}(y,z) = \int_0^1 (xy - y'z + z''y)dx \qquad \text{sujeta a} \quad z = 2y$$

siendo

$$\begin{array}{ll} y(0) = {}^{1}/_{24} & y(1) = 0 \\ z(0) = 0 & z(1) = -{}^{1}/_{4} \end{array}$$

PROBLEMAS ISOPERIMÉTRICOS

Problema 1:

Hallar la curva cerrada de longitud fija ℓ que encierra la región D de mayor área.

Planteo: Supongamos que la curva C buscada está parametrizada por

$$\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big),\ t_0 \le t \le t_1$$

Cosideremos el campo vectorial auxiliar $\vec{F}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right)$. Luego por el Teorema de Green

$$\oint_C \vec{F}d\vec{r} = \iint_D \left(Q_x - P_y\right)dxdy = \iint_D dxdy = \text{Area}(D)$$

Por otro lado

$$\oint_C \vec{F}d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\big(\vec{r}(t)\big).\vec{r}\,'(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(-\frac{y(t)}{2}, \frac{x(t)}{2}\right).\big(x'(t), y'(t)\big)dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \big(x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\big)dt$$

Por lo tanto, se busca optimizar:

$$\text{Area}(D) = \mathcal{J}(x,y) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (xy' - x'y)dt$$

sujeto a la restricción

$$\ell = \oint_C ds = \int_{t_0}^{t_1} |\vec{r}'(t)|dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2}dt$$

y que satisfaga las condiciones de contorno $x(t_0) = x(t_1)$, $y(t_0) = y(t_1)$.

Nota: El nombre *isoperimétrico* viene del hecho que la longitud de la cuerda es constante. A diferencia de los problemas con restricción vistos anteriormente, ahora las restricciones se determinan con identidades en las que interviene una integral.

Problema 2: (Dual al problema 1)

Hallar la curva cerrada de mínima longitud que encierra un área fija A.

Planteo: Usando la misma parametrización de la curva buscada C, resulta que se busca optimizar:

$$\ell = \mathcal{J}(x,y) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2}dt$$

sujeto a la restricción

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (xy' - x'y)dt = A$$

y que satisfaga las condiciones de contorno $x(t_0) = x(t_1)$, $y(t_0) = y(t_1)$.

Generalización del problema Isoperimétrico

En general, se busca hallar la extremal de

$$\mathcal{J}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')dx$$

Sujeto a m restricciones (conocidas como isoperimétricas) del tipo

$$\int_{x_0}^{x_1} \phi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')dx = \ell_i \qquad \forall i = 1, \dots, m$$

y a las condiciones de contorno

$$y_1(x_0) = y_{10} \qquad y_2(x_0) = y_{20} \quad \dots \quad y_n(x_0) = y_{n0}$$

$$y_1(x_1) = y_{11} \qquad y_2(x_1) = y_{21} \quad \dots \quad y_n(x_1) = y_{n1}$$

Solución: El procedimiento para resolver los problemas isoperimétricos generales también es conocido como *Método de Multiplicadores de Lagrange*:

- Construir la función de Lagrange:

$$F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \phi_i$$

- Calcular las EE para cada incógnita y_i

$$F^*_{y_i} - \frac{d}{dx}\left(F^*_{y_i'}\right) = 0 \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

- Resolver el sistema de $n + m$ EDO conformado por las anteriores n ecuaciones más las m restricciones

$$\int_{x_0}^{x_1} \phi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \ \dots, y_n')dx = \ell_i \qquad \forall i = 1, \dots, m$$

  Siempre teniendo en cuenta que las λ_i deben considerarse constantes desconocidas, y no funciones de x como antes.

Demostración: Hagamos la prueba suponiendo que tenemos sólo dos funciones incógnitas ($n = 2$) y solo una restricción ($m = 1$). En el caso general se procede de manera análoga.

Problema: Nos proponemos entonces optimizar

$$\mathcal{J}(y_1, y_2) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, y_1', y_2')dx$$

sujeto a la restricción isoperimétrica

$$\int_{x_0}^{x_1} \phi(x, y_1, y_2, y_1', y_2')dx = \ell$$

y a las condiciones de contorno

$$y_1(x_0) = y_{10} \qquad y_2(x_0) = y_{20}$$

$$y_1(x_1) = y_{11} \qquad y_2(x_1) = y_{21}$$

Podemos reducir este problema a un problema con una restricción dada por una E.D. como antes definiendo la función auxiliar

$$z = z(x) = \int_{x_0}^{x} \phi(t, y_1, y_2, y_1', y_2')dt$$

la cual verifica que

$$z' = \phi(x, y_1, y_2, y_1', y_2') \qquad z(x_0) = 0 \qquad z(x_1) = \ell$$

Incorporando a z como nueva incógnita al problema de optimización, se obtiene el siguiente planteo equivalente del problema isoperimétrico en análisis:

Problema Equivalente: Optimizar el funcional

$$\mathcal{J}(y_1, y_2, z) = \mathcal{J}(y_1, y_2) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, y_1', y_2')dx$$

sujeto a la restricción

$$z' = \phi(x, y_1, y_2, y_1', y_2')$$

y a las condiciones de contorno

$$y_1(x_0) = y_{10} \qquad y_2(x_0) = y_{20}$$

$$y_1(x_1) = y_{11} \qquad y_2(x_1) = y_{21}$$

$$z(x_0) = 0 \qquad z(x_1) = \ell$$

Este nuevo planteo es un problema de extremos condicionados en el que la restricción es una ED. Por este motivo, se resuelve con el procedimiento visto anteriormente, esto es, se plantea el Funcional de Lagrange

$$F^{**} = F + \lambda(\phi - z')$$

y se hallan las EE correspondientes.

Ecuaciones de Euler para las z_i:

$$F^{**}_{z'} = \text{cte} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -\text{cte}$$

Resultando que los multiplicadores de Lagrange usados para resolver problemas isoperimétricos deben considerarse constantes, y no funciones de x como antes.

Por otro lado, las EE para las incógnitas y_i son iguales a las que se obtendrían si el Funcional de Lagrange fuese

$$F^{*} = F + \lambda\phi$$

ya que z' no interfiere en el resultado obtenido al derivar por y_i o y_i'.

Concluyendo que para resolver el problema isoperimétrico planteado se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} F^*_{y_1} - \dfrac{d}{dx}\left(F^*_{y_1'}\right) = 0 \\ F^*_{y_2} - \dfrac{d}{dx}\left(F^*_{y_2'}\right) = 0 \\ \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \phi(x, y_1, y_2, y_1', y_2')dx = \ell \end{cases}$$

Nota: La función auxiliar z no aparece en el sistema final obtenido. Sólo se usa para justificar por qué λ debe considerarse constante, y para deducir la forma final del funcional de Lagrange. Sin embargo, todas las versiones del problema de optimización son equivalentes, siendo la propuesta final la más sencilla para abordar los problemas isoperimétricos.

Ejemplo: Optimizar

$$\mathcal{J}(y) = \int_0^1 \left(y'^2 - 2y\right)dx \qquad \text{sujeta a} \qquad \int_0^1 ydx = 1$$

Solución: En este caso el funcional de Lagrange es

$$F^*(x, y, \lambda) = F(x, y, y') + \lambda\phi(x, y, y') = y'^2 - 2y + \lambda y$$

siendo λ una constante desconocida.

Hallemos la EE correspondiente a y:

$$F^*_y = -2 + \lambda \qquad F^*_{y'} = 2y' \qquad \frac{d}{dx}F^*_{y'} = 2y''$$

$$-2 + \lambda - 2y'' = 0 \qquad \text{(EE para } y\text{)}$$

Despejando e integrando:

$$y'' = -1 + \frac{\lambda}{2} \;\Rightarrow\; y' = \left(-1 + \frac{\lambda}{2}\right)x + C_1 \;\Rightarrow\; y = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{4}\right)x^2 + C_1x + C_2$$

Tenemos que hallar 3 constantes, por lo que necesitamos 3 ecuaciones.

Usemos la restricción isoperimétrica para hallar la primer ecuación

$$1 = \int_0^1 ydx = \int_0^1 \left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{4}\right)x^2 + C_1x + C_2\right)dx$$

$$1 = \left.\left(\left(-\frac{1}{6} + \frac{\lambda}{12}\right)x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x\right)\right|_0^1$$

$$\boxed{1 = -\frac{1}{6} + \frac{\lambda}{12} + \frac{C_1}{2} + C_2 \qquad (1)}$$

Ahora usemos las condiciones de contorno:

$$y(0) = 0 \implies \boxed{C_2 = 0 \qquad (2)}$$

$$y(1) = 0 \implies \boxed{-\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{4} + C_1 + C_2 = 0 \qquad (3)}$$

Tenemos entonces tres ecuaciones y tres incógnitas.

Reemplazando (2) en (1) resulta

$$\frac{7}{6} = \frac{\lambda}{12} + \frac{C_1}{2} \implies 14 = \lambda + 6C_1 \quad (4)$$

Reemplazando (2) en (3) resulta

$$\frac{\lambda}{4} + C_1 = \frac{1}{2} \implies C_1 = \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4} \qquad (5)$$

Reemplazando (5) en (4) resulta

$$14 = \lambda + 6\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}\right) \implies 14 = \lambda + 3 - \frac{3}{2}\lambda \implies 11 = -\frac{1}{2}\lambda \implies \lambda = -22$$

Reemplazando en (5), resulta $C_1 = 6$. Luego la solución es

$$y = -6x^2 + 6x$$

Resolveremos ahora los problemas planteados al comienzo:

Solución del Problema 1

Se busca optimizar:

$$\text{Area}(D) = \mathcal{J}(x, y) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (xy' - x'y)dt$$

Sujeto a la restricción

$$\ell = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2}dt$$

y que satisfaga las condiciones de contorno $x(t_0) = x(t_1)$, $y(t_0) = y(t_1)$.

Para ello se considera el funcional de Lagrange dado por

$$F^*(x, y, x', y', \lambda) = \frac{1}{2}(xy' - x'y) + \lambda\sqrt{x'^2 + y'^2}$$

Obtengamos la EE para x:

$$F_x^* = \frac{1}{2}y' \qquad\qquad F_{x'}^* = -\frac{1}{2}y + \frac{\lambda x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

Luego la EE buscada es

$$\frac{y'}{2}-\frac{d}{dt}\left(-\frac{y}{2}+\frac{\lambda x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)=0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(y-\frac{\lambda x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)=0$$

$$\Longrightarrow \quad y-\frac{\lambda x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=C_1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y-C_1=\frac{\lambda x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}} \qquad (EE1)$$

Ahora obtengamos la EE para y:

$$F_y^* = -\frac{1}{2}x' \qquad F_{y'}^* = \frac{1}{2}x+\frac{\lambda y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

Luego la EE buscada es

$$-\frac{x'}{2}-\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{2}+\frac{\lambda y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)=0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(x+\frac{\lambda y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)=0$$

$$\Longrightarrow \quad x+\frac{\lambda y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=C_2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x-C_2=\frac{-\lambda y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}} \qquad (EE2)$$

Elevando al cuadrado ambas EE y sumándolas, se obtiene

$$(x-C_2)^2+(y-C_1)^2=\left(\frac{\lambda x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)^2+\left(\frac{-\lambda y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)^2$$

$$(x-C_2)^2+(y-C_1)^2=\lambda^2$$

Se obtiene una familia de circunferencias con centro en (C_2, C_1) y radio λ.

Usando la tercera ecuación del sistema dada por la restricción, resulta

$$\ell=\oint_C ds=2\pi\lambda \quad \Longrightarrow \quad \lambda=\frac{\ell}{2\pi}$$

Por lo tanto

$$(x-C_2)^2+(y-C_1)^2=\lambda^2$$

Esta es la solución general al problema, la cual consiste en una familia de circunferencias con centro en (C_2, C_1) y radio $\frac{\ell}{2\pi}$.

Las constantes C_1 y C_2 se hallan usando condiciones de contorno extras.

Problema 2

Hallar la curva cerrada de mínima longitud ℓ que encierra un área fija A.

Solución:

Se busca optimizar:

$$\ell = \mathcal{J}(x,y) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$$

Sujeto a la restricción

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (xy' - x'y)\,dt = A$$

y que satisfaga las condiciones de contorno $x(t_0) = x(t_1)$, $y(t_0) = y(t_1)$.

Para ello se considera el funcional de Lagrange dado por

$$F^*(x, y, x', y', \lambda) = \sqrt{x'^2 + y'^2} + \frac{\lambda}{2}(xy' - x'y)$$

Obtengamos la EE para x:

$$F_x^* = \frac{\lambda}{2}y' \qquad\qquad F_{x'}^* = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} - \frac{\lambda}{2}y$$

Luego la EE buscada es

$$\frac{\lambda}{2}y' - \frac{d}{dt}\left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} - \frac{\lambda}{2}y\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\lambda y - \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda y - \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = C_1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\lambda y - C_1 = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}} \qquad (EE1)$$

Ahora obtengamos la EE para y:

$$F_y^* = -\frac{\lambda}{2}x' \qquad\qquad F_{y'}^* = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} + \frac{\lambda}{2}x$$

Luego la EE buscada es

$$-\frac{\lambda}{2}x' - \frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} + \frac{\lambda}{2}x\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\lambda x + \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda x + \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = C_2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\lambda x - C_2 = \frac{-y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}} \qquad (EE2)$$

Elevando al cuadrado ambas EE y sumándolas, se obtiene

$$(\lambda x - C_2)^2 + (\lambda y - C_1)^2 = \left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{C_2}{\lambda}\right)^2 + \left(y - \frac{C_1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Se obtiene una familia de circunferencias con centro en $(C_2/\lambda, C_1/\lambda)$ y radio $1/\lambda$.

Usando la tercera ecuación del sistema dada por la restricción, resulta

$$A = \frac{\pi}{\lambda^2} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \sqrt{\frac{\pi}{A}}$$

Por lo tanto

$$\left(x - C_2\sqrt{\frac{A}{\pi}}\right)^2 + \left(y - C_1\sqrt{\frac{A}{\pi}}\right)^2 = \frac{A}{\pi}$$

$$(x - C_3)^2 + (y - C_4)^2 = \frac{A}{\pi}$$

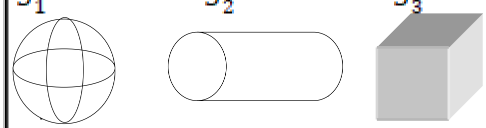
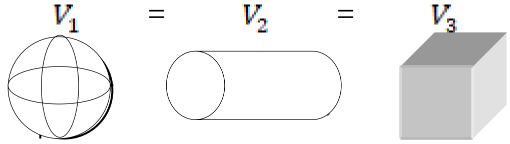
Esta es la solución general al problema, la cual consiste en una familia de circunferencias con centro en (C_3, C_4) y radio $\sqrt{\frac{A}{\pi}}$.

Las constantes C_3 y C_4 se hallan usando condiciones de contorno extras.

Conclusión:

- Para un perímetro dado, la circunferencia es la curva cerrada que encierra mayor área.
- Para un área dada, la circunferencia es la curva cerrada que tiene menor perímetro.

Esto se puede generalizar a cuerpos redondos. Un cubo es menos redondo que un cilindro, y este menos que una esfera

$S_1 \; = \; S_2 \; = \; S_3$  $V_1 \; > \; V_2 \; > \; V_3$	$V_1 \; = \; V_2 \; = \; V_3$  $S_1 \; < \; S_2 \; < \; S_3$
Para una misma superficie, la esfera es la de mayor volumen	Para un mismo volumen, la esfera es la de menor superficie externa