Universidad Nacional de San Juan

Facultad de Ingeniería

Materia: MATEMÁTICA APLICADA

Ingeniería Electromecánica-Ingeniería Mecánica

Guía de ejercicios prácticos: Cálculo Variacional

Docentes de la cátedra:

Profesor Titular	**Dr. Javier Gimenez**
Profesor Adjunto	**Dr. Emanuel Tello**
Jefe de Trabajos Prácticos	**Mg. Juan Pablo Llarena**

2024

I) FUNCIONALES DE LA FORMA

$$\mathcal{J}(y)=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\,dx$$

con las condiciones de contorno $y(x_0)=y_0$ $y(x_1)=y_1$

La función $y(x)$ que minimice (o maximice) al funcional $\mathcal{J}(y)$ cumple la siguiente **Ecuación de Euler** (EE):

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \qquad (1)$$

O equivalentemente

$$F_y-\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)=0 \qquad (1')$$

La Ecuación de Euler (1) conduce a una ecuación diferencial ordinaria (E.D.O.) de segundo orden que hay que resolver en cada caso.

La solución de la E.D.O. se llama **extremal**, solamente entre las **extremales** existe la solución "que hace mínimo o máximo al funcional $\mathcal{J}$"

Elegimos aquellas extremales que cumplan las condiciones de contorno.

<u>Casos particulares de la fórmula de Euler</u>

a) $F=F(x,y')$ $\Rightarrow$ F no depende explícitamente de y $\Rightarrow$ $F_y=0$ $\Rightarrow$ La ecuación de Euler queda

$$\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)=0 \qquad \text{o equivalentemente} \qquad F_{y'}=C_1 \qquad (2)$$

b) $F=F(y,y')$ $\Rightarrow$ F no depende explícitamente de x $\Rightarrow$ La ecuación de Euler es:

$$F-y'F_{y'}=C \qquad (3)$$

1. Hallar la extremal de:

a) $\mathcal{J}(y)=\int_0^{\pi}(2y\operatorname{sen}x-y'^2)\,dx$ con $y(0)=0,\ y(\pi)=0$

b) $\mathcal{J}(y)=\int_0^{\pi/8}(y'^2+2yy'-16y^2)\,dx$ con $y(0)=0,\ y(\pi/8)=2$

c) $\mathcal{J}(y)=\int_0^{1}(y'^2+y^2)\,dx$ con $y(0)=1,\ y(1)=e^{-1}$

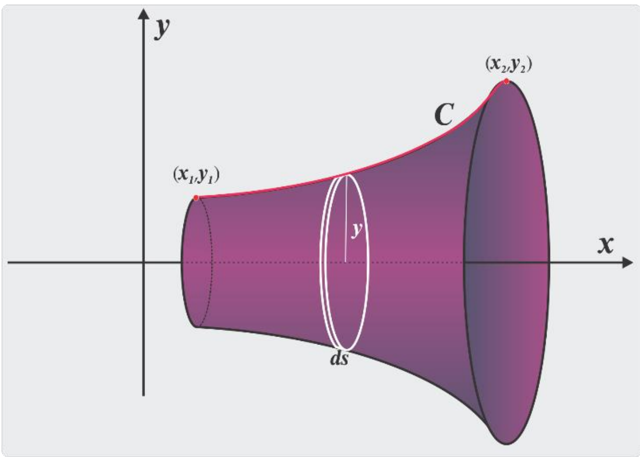
d) $\mathcal{J}(y)=\int_0^{1}(y'^2+x)\,dx$ con $y(0)=1,\ y(1)=2$

e) $\mathcal{J}(y)=\int_0^{1}(xy-y'^2)\,dx$ con $y(0)=0,\ y(1)=1$

2. Encontrar la trayectoria de un rayo de luz para los siguientes casos:

a) $V = x$ **b)** $V = y$ **c)** $V = \sqrt{y}$ **d)** $V = \frac{1}{\sqrt{y}}$ **e)** $V = \frac{1}{y}$

3. En la figura se observa una curva C que une los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) que gira alrededor del eje x. La expresión del área de la superficie generada por esta curva puede ser hallada (de manera opcional) aplicando los conocimientos de Integrales de Superficie vistos en el curso anterior. De esta manera, puede hallarse que la expresión del área de la superficie es:



$$A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\,\sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

Encuentre, entonces, la curva C que genere una superficie mínima.

4. Se acelera una masa m que está en reposo, hasta llevarla a velocidad V_f en un tiempo T. Se quiere minimizar la cantidad de combustible consumido por la máquina impulsora, cuyo gasto ($^{gr}/_{seg}$) es proporcional al cuadrado de la fuerza $f(t)$ ejercida sobre la masa. Suponer que la resistencia (β, cte de frotamiento) es proporcional a la velocidad. Encontrar la expresión de la $v(t)$.

II) FUNCIONALES QUE DEPENDEN DE DERIVADAS DE MAYOR ORDEN

$$\mathcal{J}(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', y''', \ldots . y^{(m)})\,dx$$

Las condiciones de contorno son (C. C.):

$$y(x_0) = y_0,\ \ y'(x_0) = y_{10},\ \ y''(x_0) = y_{20},\ \ \ldots\ \ ,\ \ y^{(m-1)}(x_0) = y_{(m-1)0}$$

$$y(x_1) = y_1,\ \ y'(x_1) = y_{11},\ \ y''(x_1) = y_{21},\ \ \ldots\ \ ,\ \ y^{(m-1)}(x_1) = y_{(m-1)1}$$

La función $y(x)$ que minimice (o maximice) al funcional $\mathcal{J}(y)$ cumple la siguiente **Ecuación de Euler** (EE):

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) + \frac{d^2}{dx^2}(F_{y''}) + \ldots\ldots\ldots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m}(F_{y^{(m)}}) = 0$$

5. Determinar la función extremal del funcional:

a) $\mathcal{J}(y) = \int_0^1 (x + y'')^2\, dx$ que satisface $y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 1$

b) $\mathcal{J}(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y^2 - (y'')^2) dx$ que satisface $y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y(\frac{\pi}{2}) = 1,\ y'(\frac{\pi}{2}) = 0$

c) $\mathcal{J}(y) = \int_{-1}^1 (y''^2 - 2y)\, dx$ que satisface $y(-1) = 0,\ y'(-1) = 0,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 0$

d) $\mathcal{J}(y) = \int_0^1 (y''^2 + yy')\, dx$ que satisface $y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y(1) = 2,\ y'(1) = 4$

e) $\mathcal{J}(y) = \int_{x_0}^{x_1} (2xy + (y''')^2)\, dx$

f) $\mathcal{J}(y) = \int_0^1 (y^2 + 2y'^2 + y''^2 + 2y'y'')\, dx$ que satisface

$$y(0) = 0,\ \ y'(0) = 3,\ \ y(1) = e,\ \ y'(1) = e + e^{-1}$$

III) FUNCIONALES QUE DEPENDEN DE MÁS DE UNA FUNCIÓN

$$\mathcal{J}(y_1, y_2) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, y_1', y_2')\, dx$$

Las C. C. son: $\begin{cases} y_1(x_0) = y_{10}, & y_2(x_1) = y_{20} \\ y_1(x_0) = y_{11}, & y_2(x_1) = y_{21} \end{cases}$

las E. E. para cada una de las funciones son:

$$\begin{cases} F_{y_1} - \dfrac{d}{dx} F_{y_1'} = 0 \\ F_{y_2} - \dfrac{d}{dx} F_{y_2'} = 0 \end{cases} \quad \text{Sistema de dos EDO's de 2º orden}$$

6. Encontrar el par de funciones extremales de:

a) $\mathcal{J}(y,z) = \int_0^{\pi/2} (y'^2 + z'^2 + 2yz + x) dx$ con $y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1,\ z(0) = 0,\ z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

b) $\mathcal{J}(y,z) = \int_0^1 (-2y + 2yz' - y'^2 + z'^2) dx$ con $y(0) = 1,\ z(0) = -2,\ y(1) = e,\ z(1) = -e$

c) $\mathcal{J}(y,z) = \int_a^b (y^2 + z^2 + yz + y'z') dx$

IV) PRINCIPIO DE HAMILTON

Principio de Hamilton de la acción mínima

Un sistema mecánico (conservativo) se desplaza desde t_1 a t_2 en forma tal que $\int_{t_1}^{t_2} L dt$ tenga un valor extremo. La función integrando L es la ‘‘Lagrangiana’’ siendo $L = T - V$ donde $V =$ Energía Potencial $T =$ Energía Cinética

7. Hallar las ecuaciones de movimiento de los siguientes sistemas aplicando el principio de Hamilton a:

a) Sistema masa-resorte

b) Sistema de dos masas y tres resortes

c) Péndulo simple

d) Péndulo planar con dos brazos articulados

Caso General

En general: $L = L(t, q_1, q_2, \ldots\ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots\ldots, \dot{q}_n)$

8. Plantear y resolver las ecuaciones resultantes de aplicar el principio de Hamilton, para las distintas expresiones de la energía potencial y cinética:

a) $\left.\begin{array}{l} T = q_1 + \dot{q}_1{}^2 + \dot{q}_2{}^2 \\ V = 2q_1q_2 \end{array}\right\} \ L = q_1 + \dot{q}_1{}^2 + \dot{q}_2{}^2 - 2q_1q_2$

con $q_1(0) = 1, \dot{q}_1(0) = 0, q_2(0) = \frac{1}{2}, \dot{q}_2(0) = 1$

b) $T = \dot{q}_1\dot{q}_2$, $V = q_1q_2$

c) $T = \dot{q}_1{}^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + q_1$, $V = q_1 + q_2{}^2$

d) $T = \dot{q}_1{}^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2$, $V = q_2{}^2$

V) EXTREMOS CONDICIONADOS

Optimizar

$$\mathcal{J}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\, dx$$

sujeto a los enlaces:

$$\phi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0 \quad \forall i = 1{:}m \quad \text{(debe ser } m < n\text{)}.$$

Se debe armar el funcional

$$F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \phi_i, \quad \text{con } \lambda_i = \lambda_i(x),$$

el cual tiene m + n incógnitas (n- y_i + m- λ_i). Se plantean "n" EE más m enlaces

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y_j'} = 0, \quad j = 1{:}n$$

$$\phi_i = 0, \qquad i = 1{:}m$$

9. Hallar la extremal de

a) $\mathcal{J}(y,z) = \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} + zy' + \frac{z'^2}{2}\right) dx$ sujeta a $z - y' = 0$
Con las condiciones: $y(0) = 1$, $y(1) = e^{-1}$, $z(0) = -1$, $z(1) = -e^{-1}$

b) $\mathcal{J}(y,z) = \int_0^1 (2z - y'z'') dx$ sujeta a $z' - y = 0$
siendo $y(0) = z(0) = z(1) = 0$, $y(1) = 1/24$

c) $\mathcal{J}(y,z) = \int_0^1 (xy - y'z + z''y) dx$ sujeta a $z = 2y'$
siendo $y(0) = \frac{1}{24}$, $z(0) = 0$.

d) $\mathcal{J}(y,z) = \int_0^{2\pi} (yz' + y'z + 2yz) dx$ sujeta a $y' - z' = \cos(x)$

VI) EXTREMOS CONDICIONADOS (Problemas isoperimétricos)

Optimizar

$$\mathcal{J}(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y') dx \quad \text{sujeto a} \quad \int_{x_0}^{x_1} F_i(x,y,y') dx = \ell_i, \quad i = 1{:}m$$

Se debe formar el funcional

$$F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i$$

el cual tiene $m + 1$ incógnitas (variable funcional y mas m variables escalares λ_i).

A la E.E.

$$F_y^* - \frac{d}{dx} F_{y'}^* = 0$$

se le agregan los m enlaces.

10. Hallar la extremal de los siguientes problemas isoperimétricos:

a) $\mathcal{J}(y) = \int_0^1 y'^2\, dx$ sujeto a $\int_0^1 y\, dx = 1$
Siendo las condiciones de contorno $y(0) = 0$, $y(1) = 1$

b) $\mathcal{J}(y) = \int_0^1 (y^2 + y'^2)\, dx$ sujeto a $\int_0^1 y\, dx = e$
Siendo las condiciones de contorno $y(0) = 2$, $y(1) = e + 1$

c) $\mathcal{J}(y,z) = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z)\, dx$ sujeto a $\int_0^1 \left(y' - xy' - z'^2\right) dx = 2$
Siendo las condiciones de contorno $y(0) = z(0) = 0$, $y(1) = z(1) = 1$

SOLUCIONARIO

- **Ejercicio 1**

  a) $y(x) = \operatorname{sen} x$

  b) $y(x) = 2\operatorname{sen}(4x)$

  c) $y(x) = e^{-x}$

  d) $y(x) = x + 1$

  e) $y(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{13}{12}x$

- **Ejercicio 2**

  a) $\begin{cases} x(t) = C_1 \operatorname{sen} t \\ y(t) = -C_1 \cos t + C_2 \end{cases}$ o también $\begin{cases} x(t) = C_1 \cos t \\ y(t) = -C_1 \operatorname{sen} t + C_2 \end{cases}$

  b) $\begin{cases} x(t) = -C_1 \operatorname{sen} t + C_2 \\ y(t) = C_1 \cos t \end{cases}$ o también $\begin{cases} x(t) = -C_1 \cos t + C_2 \\ y(t) = C_1 \operatorname{sen} t \end{cases}$

  c) $\begin{cases} x(t) = -C_1 t - \frac{C_1}{2}\operatorname{sen}(2t) + C_2 \\ y(t) = C_1 \cos^2 t \end{cases}$ o también $\begin{cases} x(t) = C_1\left(t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right) + C_2 \\ y(t) = C_1 \operatorname{sen}^2 t \end{cases}$

  d) $\begin{cases} x(t) = 2C_1 \operatorname{senh} t + C_2 \\ y(t) = C_1 \cosh^2 t \end{cases}$

- **Ejercicio 3**

  $$\begin{cases} x(t) = C_1 t + C_2 \\ y(t) = C_1 \cosh t \end{cases} \Longrightarrow \quad y(x) = C_1 \cosh\left(\frac{x - C_2}{C_1}\right)$$

- **Ejercicio 4**
  Agregar condiciones iniciales y resolver

- **Ejercicio 5**

  a) $y(x) = x$
  b) $y(x) = \operatorname{sen} x$
  c) $y(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{24}$

d) $y(x) = x^3 + x$

e) $y(x) = \frac{x^7}{7!} + C_1x^5 + C_2x^4 + C_3x^3 + C_4x^2 + C_5x + C_6$

f) $y(x) = e^x + (x-1)e^{-x}$

- **Ejercicio 6**

a) $\begin{cases} y = -\operatorname{sen} x \\ z = \operatorname{sen} x \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = e^x \\ z = -1 - e^x + x \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = C_1e^{-\sqrt{3}x} + C_2e^{\sqrt{3}x} - C_3\cos x - C_4\operatorname{sen} x \\ z = C_1e^{-\sqrt{3}x} + C_2e^{\sqrt{3}x} + C_3\cos x + C_4\operatorname{sen} x \end{cases}$

- **Ejercicio 7**

a) $m\ddot{x} + kx = 0$

b) $\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + k_3x_2 = 0 \end{cases}$

c) $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\theta = 0$

d)

$$\begin{cases} \ell_1\ell_2\cos(q_1 - q_2)\,\ddot{q}_1 + \ell_2^2\ddot{q}_2 - \ell_1\ell_2\dot{q}_1^2\operatorname{sen}(q_1 - q_2) - g\ell_2\operatorname{sen}(q_2) = 0 \\ (m_1 + m_2)\ell_1^2\ddot{q}_1 + m_2\ell_1\ell_2\cos(q_1 - q_2)\,\ddot{q}_2 + m_2\ell_1\ell_2\dot{q}_2\operatorname{sen}(q_1 - q_2) - (m_1 + m_2)g\ell_1\operatorname{sen}(q_1) = 0 \end{cases}$$

- **Ejercicio 8**

a) $\begin{cases} q_1(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ q_2(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \end{cases}$

b) $\begin{cases} q_1(t) = C_1\cos t + C_2\operatorname{sen} t \\ q_2(t) = C_3\cos t + C_4\operatorname{sen} t \end{cases}$

c) $\begin{cases} q_1(t) = -\frac{C_1}{2}e^{2t} - \frac{C_2}{2}e^{-2t} + C_3t + C_4 \\ q_2(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} \end{cases}$

d) $\begin{cases} q_1(t) = -\frac{C_1}{2}e^{2t} - \frac{C_2}{2}e^{-2t} \\ q_2(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} + C_3t + C_4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} q_1(t) = -\frac{C_2}{3}t^3 - C_1 t^2 + C_3 t + C_4 \\ q_2(t) = C_2 t + C_1 \end{cases}$

- **Ejercicio 9**

a) $\begin{cases} y = e^{-x} \\ z = -e^{-x} \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{8}x^2 \\ z = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{24}x^3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = -\frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{24} \\ z = -\frac{1}{4}x^2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + C_1 \\ z = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} x - C_1 - 2 \end{cases}$

- **Ejercicio 10**

a) $y = -3x^2 + 4x$

b) $y = e^x + 1$

c) $\begin{cases} y = -15x^2 + 16x \\ z = x \end{cases}$