

Universidad Nacional de San Juan

Facultad de Ingeniería

Materia: MATEMATICA APLICADA

Ingeniería Electromecánica-Ingeniería Mecánica

Guía de ejercicios prácticos

Docentes de la cátedra:

Profesor Titular

Dr. Javier Gimenez

Profesor Adjunto

Dr. Emanuel Tello

Jefe de Trabajos Prácticos

Mg. Juan Pablo Llarena

2024

Tabla de transformada de Laplace

	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$	Observaciones
1	$a f(t) + b g(t)$	$a F(s) + b G(s)$	Linealidad
2	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$	Cambio de escala
3	$e^{at} f(t)$	$F(s - a)$	Traslación en s
4	$f(t - a)u(t - a)$ $a \geq 0$	$e^{-as} F(s)$	Traslación en t
5	$f'(t)$ con $f(t)$ continua	$sF(s) - f(0)$	
6	$f^{(n)}(t)$ donde n es el orden de derivación	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$	
7	$\int_0^t f(u) du$	$\frac{F(s)}{s}$	u : variable muda
8	$t^n f(t)$ $n = \text{exponente}$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$	$F^{(n)}(s)$ es la derivada n -ésima de $F(s)$ respecto de s
9	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(u) \cdot du$	
10	t^n $n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	
11	e^{at}	$\frac{1}{s - a}$	
12	$\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	
13	$\text{cos}(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	
14	$\text{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	
15	$\text{cosh}(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	
16	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	Función Escalón unitario de Heaviside
17	$\delta(t - a)$	e^{-as}	Función Impulso Unitario (función Delta de Dirac)
18	$f(t) = f(t + T)$	$\frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$	Funciones periódicas $T = \text{período}$

Teorema del valor Inicial: $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$

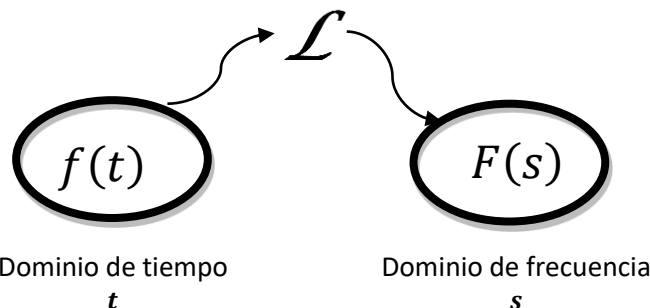
Teorema del valor Final: $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

Transformada de Laplace

Definimos la Transformada de Laplace de $f(t)$ como

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s)$$

Donde consideraremos a s una **variable real** y e^{-st} es llamado **núcleo de la transformación**.



Dado que el límite superior de la integral de la definición es infinito, estamos en presencia de una integral impropia, esto es:

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(t)e^{-st} dt$$

La existencia de la transformada de Laplace está condicionada a si esta integral impropia converge para al menos algunos valores de s . Es por ello que esta definición la aplicamos a funciones continuas o continuas por partes, de orden exponencial y que tienen valor distinto de cero para $t \geq 0$, o sea, funciones causales.

EJERCICIOS

PARTE 1: TRANSFORMADA DE LAPLACE

Problema resuelto:

Resolver: $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ para

$$f(t) = 3t^2 + 2 + te^{-t} + e^{2t}\sin(3t)$$

Solución: $F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = 3\mathcal{L}(t^2) + 2\mathcal{L}(1) + \mathcal{L}(te^{-t}) + \mathcal{L}(e^{2t}\sin(3t))$ (por prop. 1)

$$\mathcal{L}(t^2) = \frac{2!}{s^3} \quad (\text{por prop. 10})$$

$$\mathcal{L}(1) = \mathcal{L}(t^0) = \frac{0!}{s} = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(e^{-t}) = \frac{1}{(s+1)} \quad (\text{por prop. 11})$$

$$\mathcal{L}(te^{-t}) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+1} \right) = \frac{1}{(s+1)^2} \quad (\text{por prop. 8})$$

$$\mathcal{L}(\sin(3t)) = \frac{3}{s^2+3^2} \quad (\text{por prop. 12})$$

$$\mathcal{L}(e^{2t}\sin(3t)) = \frac{3}{(s-2)^2+3^2} \quad (\text{por prop. 3})$$

Por lo tanto:

$$F(s) = \frac{6}{s^3} + \frac{2}{s} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{3}{(s-2)^2+9}$$

1) Usando las propiedades indicadas, resolver:

a) $\mathcal{L}(\cos(at))$ usar propiedad 6 para $n = 2$

b) $\mathcal{L}(u(t-a))$ usar propiedades 16 y 4 ó la definición

c) $\mathcal{L}\left(\frac{\text{sen}(t)}{t}\right)$ usar propiedades 12 y 9

d) $\mathcal{L}(\sinh(at))$ usar propiedad 11 recordando que: $\sinh(at) = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$

e) $\mathcal{L}(\cosh(at))$ usar propiedades 5 y 14

f) $\mathcal{L}(\text{sen}(at))$ usar propiedades 13 y 7

g) $\mathcal{L}(t^2 \cos(at))$ usar propiedades 13 y 8

h) $\mathcal{L}(g(t)\delta(t-a))$ usar propiedad 17

2) Aplicar el teorema del valor inicial y del valor final:

a) $f(t) = t^2$

b) $f(t) = te^{-t}$

c) $f(t) = e^{-t}\text{sen}(at)$

3) El Teorema de Existencia de la Transformada de Laplace brinda una condición suficiente pero no necesaria. Esto es, si una función cumple con las hipótesis (continua por partes y de orden exponencial) entonces existe su transformada, pero si no cumple con dichas hipótesis puede que la transformada exista o no. Verificar esta situación usando algún software online con las funciones

a) $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$

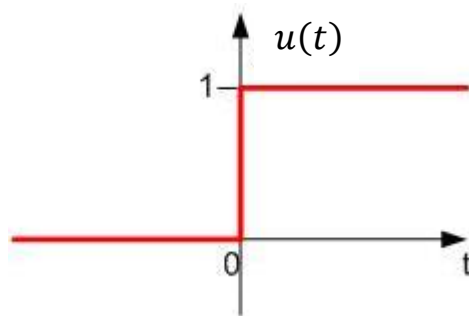
b) $f(t) = \frac{1}{t}$

4) Calcular la transformada de Laplace de:

a) $g(t) = t^2 e^{-6t}$

b) $g(t) = e^{-2t} \cos(3t)$

La **función escalón unitario** de Heaviside, $u(t)$, es muy utilizada en ingeniería, y está definida por:



$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

5) Usando $a = 2$, grafique las siguientes funciones sobre el dominio $t \geq 0$.

a) t^2

b) $t^2 u(t-a)$

c) $(t-a)^2 u(t-a)$.

Problema resuelto:

Sea $f(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t \leq 1 \\ t & t > 1 \end{cases}$, encontrar $F(s)$ utilizando la expresión anterior.

Solución:

$$f(t) = 2t + (t - 2t)u(t - 1) = 2t - tu(t - 1)$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{2}{s^2} - \mathcal{L}(tu(t - 1))$$

Para calcular $\mathcal{L}(tu(t - 1))$ usaremos la prop. 4 que establece que:

$$\mathcal{L}(f(t - a)u(t - a)) = e^{-as}F(s)$$

Por ello deberemos expresar a la función t de otra manera, para poder visualizarla como desplazada en una unidad como lo está $u(t - 1)$:

$$\mathcal{L}(tu(t - 1)) = \mathcal{L}((t - 1 + 1)u(t - 1)) = \mathcal{L}((t - 1)u(t - 1)) + \mathcal{L}(u(t - 1)) = \frac{1}{s^2}e^{-s} + \frac{1}{s}e^{-s}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{2}{s^2} - e^{-s} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} \right)$$

6) Calcular la transformada de Laplace de:

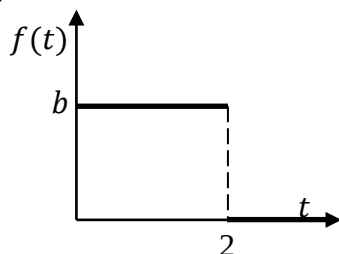
a) $g(t) = (3t + 1)u(t - 1)$

b) $g(t) = e^{2-t}u(t - 2)$

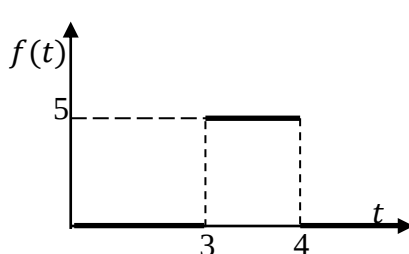
c) $g(t) = (t^2 - 1)u(t - 1)$

7) En los siguientes problemas formar la expresión analítica de los pulsos y calcular la transformada de Laplace

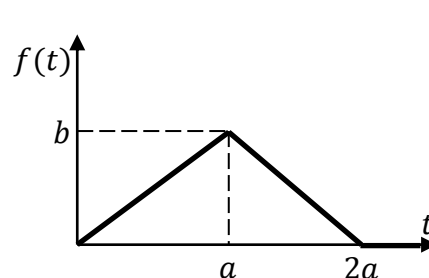
a)



b)



c)



d) $f(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{si } 0 < t < \pi \\ 0 & \text{si } t > \pi \end{cases}$

e) $f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } 0 < t < 3 \\ 0 & \text{si } t > 3 \end{cases}$

f) $f(t) = \begin{cases} t^2 - 4t + 3 & \text{si } 1 < t < 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

g) $f(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{si } 0 < t < \pi \\ \sin(t) & \text{si } t > \pi \end{cases}$

h) $f(t) = tu(t - 1) + t^2\delta(t - 1)$

Problema Resuelto:

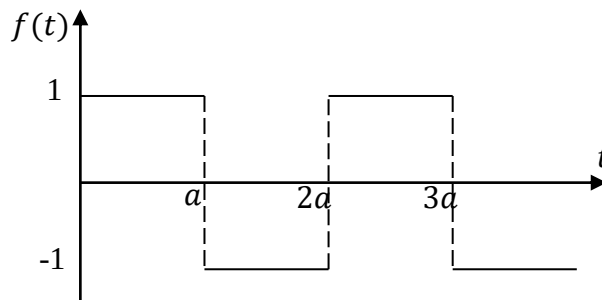
Recordando que la transformada de Laplace de una función periódica $f(t)$, con período T es:

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

Calcular $F(s)$ de la siguiente función periódica:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < a \\ -1 & a < t < 2a \end{cases}$$

para la cual $T = 2a$



Solución:

- Método I

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt = \frac{1}{1 - e^{-s2a}} \left\{ \int_0^a e^{-st} 1 dt + \int_a^{2a} e^{-st} (-1) dt \right\} = \\ &= \frac{1}{1 - (e^{-sa})^2} \left(\frac{1 - 2e^{-as} + e^{-2as}}{s} \right) = \frac{(1 - e^{-as})^2}{s(1 - e^{-as})(1 + e^{-as})} = \frac{1}{s} \left[\frac{e^{\frac{as}{2}} - e^{-\frac{as}{2}}}{e^{\frac{as}{2}} + e^{-\frac{as}{2}}} \right] \\ \therefore F(s) &= \frac{1}{s} \tanh\left(\frac{as}{2}\right) \end{aligned}$$

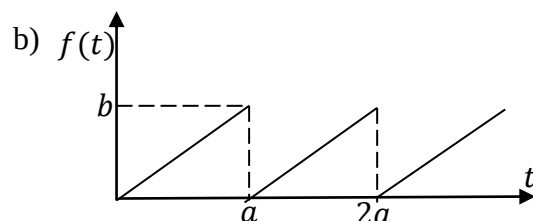
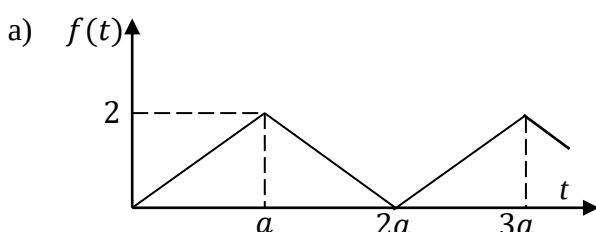
- Método II

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 - 2u(t - a) + 2u(t - 2a) - 2u(t - 3a) + \dots \\ F(s) &= \frac{1}{s} - \frac{2}{s}e^{-as} + \frac{2}{s}e^{-2as} - \frac{2}{s}e^{-3as} + \dots = -\frac{1}{s} + \frac{2}{s} - \frac{2}{s}e^{-as} + \frac{2}{s}e^{-2as} - \frac{2}{s}e^{-3as} + \dots = \\ &= -\frac{1}{s} + \frac{2}{s} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-e^{-as})^k \right] \end{aligned}$$

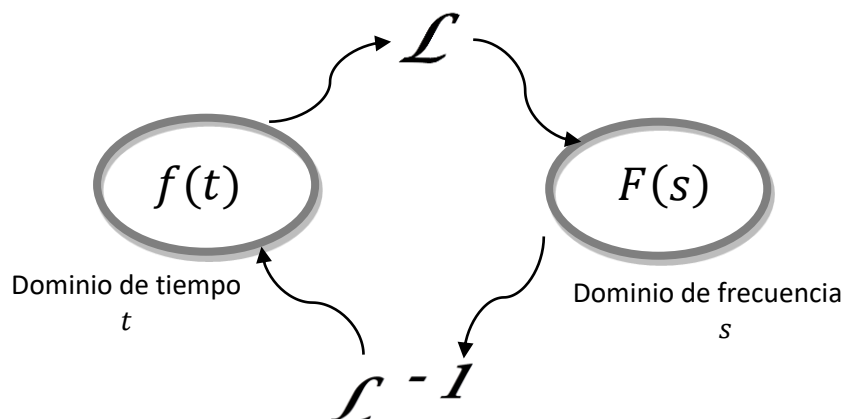
Aparece una serie geométrica de razón $r = -e^{-as}$ la cual converge a $\frac{1}{1-r}$ por ser $|r| = e^{-as} < 1$ ya que $as > 0$ cuando $s > 0$. Luego

$$\begin{aligned} F(s) &= -\frac{1}{s} + \frac{2}{s} \frac{1}{1 + e^{-as}} = \frac{-(1 + e^{-as}) + 2}{s(1 + e^{-as})} = \frac{1}{s} \left[\frac{1 - e^{-as}}{1 + e^{-as}} \right] \\ \therefore F(s) &= \frac{1}{s} \tanh\left(\frac{as}{2}\right) \end{aligned}$$

8) Calcular $F(s)$ de las siguientes funciones periódicas.



PARTE 2: ANTITRANSFORMADA DE LAPLACE



9) Usando la tabla, calcular $\mathcal{L}^{-1}(F(s))$ siguiendo el orden señalado:

a1) $\frac{1}{s^2}$

a2) $\frac{1}{(s-2)^2}$

a3) $\frac{3s}{(s-2)^3}$

a4) $\frac{e^{-as}}{(s-2)^3}$

b1) $\frac{1}{s^2+1}$

b2) $\frac{1}{s^2+4}$

b3) $\frac{1}{s(s^2+4)}$

b4) $\frac{e^{-s}}{s(s^2+4)}$

c1) $\frac{s+2}{(s+2)^2+4}$

c2) $\frac{s}{s^2+4s+8}$

c3) $\frac{6s-4}{s^2-4s+20}$

d1) $\frac{1}{(s+1)^2} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+1} \right)$

d2) $\frac{s}{(s^2+a^2)^2} = -\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2+a^2} \right)$

Convolución de funciones:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(x) \cdot g(t-x) dx$$

Ejercicio resuelto:

Resolver $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2(s+1)} \right]$ usando convolución

Solución:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2(s+1)} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[\left(\frac{1}{s^2} \right) \left(\frac{1}{s+1} \right) \right] = t * e^{-t} = \int_0^t x e^{-(t-x)} dx = \\ &= e^{-t} \int_0^t x e^x dx = e^{-t} (x e^x - e^x) \Big|_0^t = t - 1 + e^{-t} \end{aligned}$$

10) Hallar $\mathcal{L}^{-1}(F(s))$ por convolución:

a) $\frac{1}{(s-a)(s-b)}$; con $a \neq b$	b) $\frac{3}{s^2(s^2+9)}$	c) $\frac{8}{s(s+2)}$
d) $\frac{7}{(s-4)^2}$	e) $\frac{1}{s^4}$	f) $\frac{1}{s(s^2+3)}$
g) $\frac{F(s)}{s}$	h) $\frac{1}{(s+2)(s^2+4s+20)}$	

Fracciones simples o fracciones parciales

Cualquier expresión racional que toma la forma $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, donde $P(s)$ y $Q(s)$ son polinomios de los cuales el grado de $Q(s)$ es mayor que el de $P(s)$, puede escribirse como la suma de fracciones parciales de la forma: $\frac{A}{(s-r)^i}$ y $\frac{Bs+C}{(as^2+bs+c)^i}$.

Se mostrará con ejemplos cómo se obtienen estos coeficientes A , B , C , etc.

Problema Resuelto:

Luego de descomponer en fracciones simples a $F(s)$, se calcula la antitransformada de Laplace de esta expresión.

Caso A: Los ceros del denominador son todos números reales.

$$F(s) = \frac{s}{(s-2)^2(s-1)(s+2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s-2)^2} + \frac{D}{s-2} \quad (1)$$

Multiplicando sucesivamente ambos miembros por $(s-1)$, $(s+2)$, $(s-2)^2$, y haciendo tender en cada caso $s \rightarrow 1$, $s \rightarrow -2$, $s \rightarrow 2$, respectivamente, obtengo A , B y C , o sea:

$$A = \lim_{s \rightarrow 1} \left[\frac{(s-1)s}{(s-2)^2(s-1)(s+2)} \right] = \frac{1}{3}$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -2} \left[\frac{(s+2)s}{(s-2)^2(s-1)(s+2)} \right] = \frac{1}{24}$$

$$C = \lim_{s \rightarrow 2} \left[\frac{(s-2)^2 s}{(s-2)^2(s-1)(s+2)} \right] = \frac{1}{2}$$

Para calcular el valor de D se da cualquier valor a s en la expresión (1), por ejemplo $s = 0$, obteniendo

$$0 = \frac{A}{-1} + \frac{B}{2} + \frac{C}{4} + \frac{D}{-2} \Rightarrow D = -2A + B + \frac{C}{2} = -\frac{9}{24}$$

Otra forma (más conveniente): multiplicando ambos miembros por s y hacer tender $s \rightarrow \infty$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = 0 = A + B + D \Rightarrow D = -A - B = -\frac{9}{24}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{3}}{s-1} + \frac{\frac{1}{24}}{s+2} + \frac{\frac{1}{2}}{(s-2)^2} + \frac{-\frac{9}{24}}{s-2}\right) = \frac{1}{3}e^t + \frac{1}{24}e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{2t} - \frac{9}{24}e^{2t} = f(t)$$

Caso B: Entre los ceros del denominador existen números complejos conjugados.

$$F(s) = \frac{(s-1)}{(s^2+2s+4)(s+2)} = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs+D}{s^2+2s+4}$$

$$\text{donde } A = \lim_{s \rightarrow -2} \left[\frac{(s+2)(s-1)}{(s^2+2s+4)(s+2)} \right] = -\frac{3}{4}$$

$$\text{Haciendo } s = 0 \quad -\frac{1}{8} = \frac{A}{2} + \frac{D}{4} \Rightarrow D = 1$$

$$\text{Haciendo } s = 1 \quad 0 = \frac{A}{3} + \frac{B+D}{7} \Rightarrow B = \frac{3}{4}$$

Luego

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{-\frac{3}{4}}{(s+2)} + \frac{\frac{3}{4}s+1}{s^2+2s+4} = -\frac{3}{4(s+2)} + \frac{\frac{3}{4}(s+1) - \frac{3}{4} + 1}{(s+1)^2+3} = \\ &= \frac{-3}{4(s+2)} + \frac{3}{4} \left[\frac{s+1}{(s+1)^2+3} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(s+1)^2+3} \right] \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = -\frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{3}{4}e^{-t} \cos(\sqrt{3}t) + \frac{1}{4\sqrt{3}}e^{-t} \sin(\sqrt{3}t) = f(t)$$

11) Hallar $\mathcal{L}^{-1}(F(s))$:

$$\text{a) } F(s) = \frac{2s+1}{(s-1)(s^2-2s-3)}$$

$$\text{f) } F(s) = \frac{1}{(s-1)^3(s+2)}$$

$$\text{b) } F(s) = \frac{1}{(s-3)^3(s+2)}$$

$$\text{g) } F(s) = \frac{1}{(s+1)(s^3+1)}$$

$$\text{c) } F(s) = \frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)}$$

$$\text{h) } F(s) = \frac{3s^3-3s^2-40s+36}{(s^2-4)^2}$$

$$\text{d) } F(s) = \frac{1}{s^3(s+1)}$$

$$\text{i) } F(s) = \frac{(s-1) \cdot e^{-3s}}{(s+2)(s^2+2s+2)}$$

$$\text{e) } F(s) = \frac{1}{s(s+1)^3}$$

PARTE 3: APLICACIONES A ECUACIONES DIFERENCIALES

Problema Resuelto:

$$\text{Resolver: } \begin{cases} y'' + 3y' + 2y = e^{-2t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \quad \text{aplicando la Transformada de Laplace}$$

Solución: Transformando a ambos miembros, usando la notación $\mathcal{L}(y(t)) = Y(s)$ y la propiedad 6, se puede plantear:

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$Y(s) \cdot (s^2 + 3s + 2) - s - 2 - 3 = \frac{1}{s+2}$$

$$Y(s) \cdot (s+2)(s+1) = \frac{1}{s+2} + s + 5$$

$$Y(s) \cdot (s+2)(s+1) = \frac{s^2 + 7s + 11}{s+2}$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + 7s + 11}{(s+2)^2(s+1)} = \frac{A}{(s+2)^2} + \frac{B}{(s+2)} + \frac{C}{(s+1)}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow -2} \left[\frac{(s+2)^2(s^2 + 7s + 11)}{(s+2)^2(s+1)} \right] = -1$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -1} \left[\frac{(s+1)(s^2 + 7s + 11)}{(s+2)^2(s+1)} \right] = 5$$

Multiplicando por s y haciendo $s \rightarrow \infty$ se obtiene:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = 1 = 0 + B + C \Rightarrow B = 1 - C = -4$$

$$y(t) = -te^{-2t} - 4e^{-2t} + 5e^{-t}$$

12) Problemas Propuestos:

$$\text{a) } \begin{cases} y'' + 5y' + 4y = 20e^t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} y'' + a^2y = f(t) \\ y(0) = A \\ y'(0) = B \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} y'' + 9y = 18t \\ y(0) = 9 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2 e^{2t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \\ y''(0) = 6 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} y'' + 4y = f(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad \text{para}$$

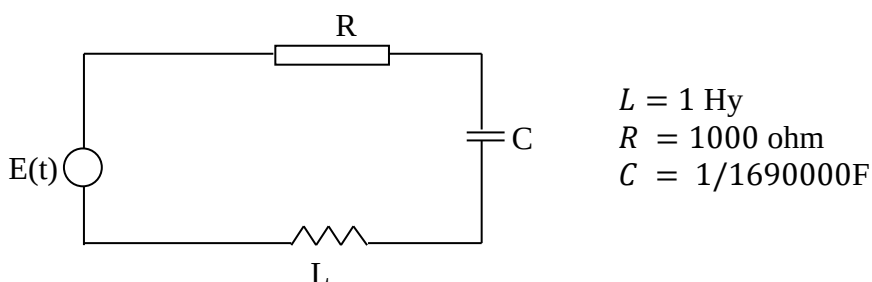
$$\text{i) } f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

$$\text{ii) } f(t) = u(t-2)$$

$$\text{iii) } f(t) = \delta(t)$$

$$\text{iv) } f(t) = \delta(t-2)$$

- 13) En el instante $t = 0$ se aplica una FEM impulsiva $\delta(t)$ al circuito de la figura. Hallar $i(t)$ sabiendo que las condiciones iniciales son nulas.



- 14) Un circuito serie RLC ($L = 1, R = 1000, 1/C = 1.250.000$) se cierra en $t = 0$, siendo la carga en el capacitor $Q_0 = 1$. Transcurrido 2 seg. se le aplica una FEM continua de 1 volt. Halle $q(t)$ e $i(t)$.
- 15) Un sistema masa-resorte tiene una masa = 1, constante de amortiguamiento = 2, constante del resorte = 10, y fuerza externa $f(t) = e^{-t}$. Calcular la posición y la velocidad si en $t = 0$:
- la masa es retirada una unidad y soltada
 - la masa es golpeada desde la posición de equilibrio, imprimiéndole una velocidad unitaria
 - las condiciones iniciales son nulas

PARTE 4: APLICACIONES A SISTEMAS LINEALES, CAUSALES E INVARIANTES

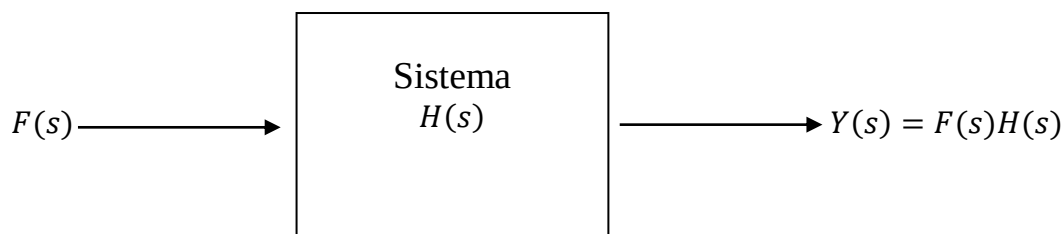
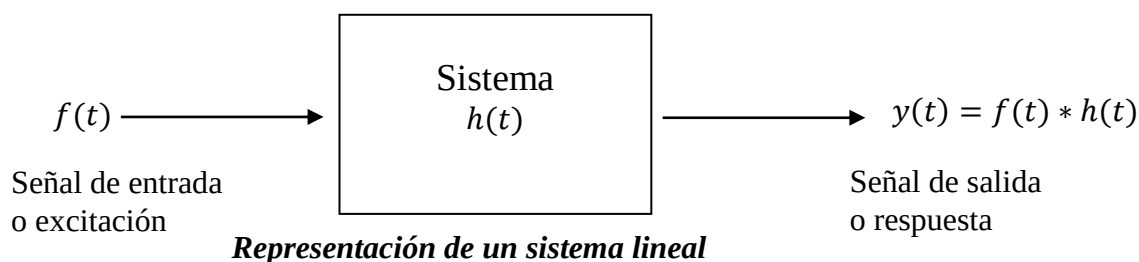


Diagrama en bloque de la función de transferencia

- 16) Un sistema lineal tiene una función de transferencia: $H(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$

Encontrar : a) $\mathcal{R}(\delta(t))$, b) $\mathcal{R}(e^{-t})$, c) $\mathcal{R}(u(t-2))$, d) $\mathcal{R}(e^{-2t})$, e) $\mathcal{R}(f(t))$.

- 17) Si $\mathcal{R}(f(t)) = \int_0^t f(u)du$. Encontrar $H(s)$.

18) Un sistema lineal tiene para una entrada $f(t) = t$, una respuesta $y(t) = t + e^{-t} - 1$. Se pide:

- a) función de transferencia
- b) respuesta a la entrada $\sin(t)$

19) De un sistema lineal se conoce $\mathcal{R}(e^{-t}) = e^{-t} - e^{-3t}$. Se pide $\mathcal{R}(e^{-3t})$ y $\mathcal{R}(f(t))$.

20) En un sistema lineal la $\mathcal{R}(\delta(t)) = \frac{1}{2}\sin(2t)$. Encontrar $f(t)$ si $\mathcal{R}(f(t)) = t - \frac{\sin(2t)}{2}$

PARTE 5: ECUACIONES DIFERENCIALES SIMULTÁNEAS

21) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales

- a)
$$\begin{cases} y' + x'' = 0 & y(0) = 0 & y'(0) = 1 \\ y'' - x' = 0 & x(0) = 2 & x'(0) = 0 \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} y'' - x = 0 & y(0) = 1 & y'(0) = 1 \\ x'' - y = 0 & x(0) = 1 & x'(0) = -1 \end{cases}$$
- c)
$$\begin{cases} y'' - x' - 4y + 2x = \sin(t) & y(0) = y'(0) = x(0) = 0 \\ y'' + 2x' + y = 0 \end{cases}$$

BIBLIOGRAFÍA

1. Glyn James. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*. 2ªed. México: Pearson Educación, 2002.
2. Erwin Kreyszing. *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. México: Limusa, 1979.
3. Murray R. Spiegel. *Teoría y problemas de Transformadas de Laplace*. México: McGraw-Hill, 1970-1971.
4. Peter V. O'Neil. *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. Cengage Learning

SOLUCIONARIO

Ejercicio 1:

h) $g(a)e^{-as}$

Ejercicio 2:

a) $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \infty$

$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = 0$

b) $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = 0$

$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = 0$

c) $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = 0$

$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = 0$

Ejercicio 3:

a) $F(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$

b) No existe

Ejercicio 4:

a) $G(s) = \frac{2}{(s+6)^3}$

b) $G(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2+9}$

Ejercicio 5:

Graficar y analizar porque la función el ítem c) es una traslación temporal de la del ítem a)

Ejercicio 6:

a) $G(s) = e^{-s} \left(\frac{3}{s^2} + \frac{4}{s} \right)$

b) $G(s) = \frac{e^{-2s}}{s+1}$

c) $G(s) = e^{-s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} \right)$

Ejercicio 7:

a) $F(s) = \frac{b}{s} - \frac{b}{s} e^{-2s}$

b) $F(s) = \frac{5}{s} e^{-3s} - \frac{5}{s} e^{-4s}$

c) $F(s) = \frac{b}{as^2} (1 - 2e^{-as} + e^{-2as})$

d) $F(s) = \frac{1}{s^2+1} (1 + e^{-\pi s})$

e) $F(s) = \frac{1}{s+1} (1 - e^{-3s-3})$

f) $F(s) = e^{-s} \left(\frac{2}{s^3} - \frac{2}{s^2} \right) - e^{-3s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} \right)$

g) $F(s) = \frac{s}{s^2+1} + e^{-\pi s} \left(\frac{s-1}{s^2+1} \right)$

h) $F(s) = e^{-s} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} + 1 \right)$

Ejercicio 8:

a) $F(s) = \frac{2(1-e^{-as})}{as^2(1+e^{-as})}$

b) $F(s) = \frac{1}{1-e^{-as}} \frac{b}{a} \left(-\frac{as+1}{s^2} e^{-as} + \frac{1}{s^2} \right)$

Ejercicio 9:

a1) $f(t) = t$

a2) $f(t) = te^{2t}$

- a3) $f(t) = 3te^{2t} + 3t^2e^{2t}$
a4) $f(t) = \frac{1}{2}e^{2(t-a)}(t-a)^2u(t-a)$
b1) $f(t) = \text{sen } t$
b2) $f(t) = \frac{1}{2}\text{sen}(2t)$
b3) $f(t) = \frac{1}{4}(1 - \cos(2t))$
b4) $f(t) = \frac{1}{4}(1 - \cos(2(t-1)))u(t-1)$
c1) $f(t) = e^{-2t}\cos(2t)$
c2) $f(t) = e^{-2t}(\cos(2t) - \text{sen}(2t))$
c3) $f(t) = e^{2t}(6\cos(4t) + 2\text{sen}(4t))$
d1) $f(t) = te^{-t}$
d2) $f(t) = \frac{t}{2a}\text{sen}(at)$

Ejercicio 10:

- a) $f(t) = \frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$
b) $f(t) = -\frac{1}{9}\text{sen}(3t) + \frac{t}{3}$
c) $f(t) = 4(1 - e^{-2t})$
d) $f(t) = 7te^{4t}$
e) $f(t) = \frac{t^3}{6}$
f) $f(t) = \frac{1}{3}(1 - \cos(\sqrt{3}t))$
g) $f(t) = \int_0^t f(x)dx$
h) $f(t) = \frac{1}{16}e^{-2t}(1 - \cos(4t))$

Ejercicio 11:

- a) $f(t) = -\frac{3}{4}e^t + \frac{7}{8}e^{3t} - \frac{1}{8}e^{-t}$
b) $f(t) = \frac{1}{125}e^{3t} - \frac{1}{25}te^{3t} + \frac{1}{10}t^2e^{3t} - \frac{1}{125}e^{-2t}$
c) $f(t) = \frac{8}{9} + \frac{40}{9}t + \frac{10}{9}\cos(3t) + \frac{50}{27}\text{sen}(3t)$
d) $f(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} - e^{-t}$
e) $f(t) = 1 - e^{-t}\left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)$
f) $f(t) = \frac{1}{6}e^t + \frac{1}{54}te^t + \frac{1}{6}t^2e^t - \frac{1}{27}e^{-2t}$
g) $f(t) = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}te^{-t} - \frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{3\sqrt{3}}e^{t/2}\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$
h) $f(t) = -2te^{2t} + 3e^{-2t} + 5te^{-2t}$
i) $f(t) = \left(-\frac{3}{2}e^{-2(t-3)} + \frac{3}{2}e^{-(t-3)}\cos(t-3) - \frac{1}{2}e^{-(t-3)}\text{sen}(t-3)\right)u(t-3)$

Ejercicio 12:

- a) $y(t) = 2e^t - 4e^{-t} + 2e^{-4t}$
b) $y(t) = \frac{f(t)\text{sen}(at)}{a} - A\cos(at) - \frac{B}{A}\text{sen}(at)$
c) $y(t) = 9\cos(3t) - \frac{2}{3}\text{sen}(3t) + 2t$
d) $y(t) = e^{2t}(t^2 - 6t + 12) + e^t\left(-\frac{1}{2}t^2 - 4t - 11\right)$
e) i) $y(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{2}\text{sen}(2t) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2(t-1))\right)u(t-1)$
ii) $y(t) = \frac{1}{4}u(t-2) - \frac{1}{4}\cos(2(t-2))u(t-2) + \frac{1}{2}\text{sen}(2(t-2))u(t-2)$
iii) $y(t) = \text{sen}(2t)$

$$\text{iv) } y(t) = \frac{1}{2} \text{sen}(2(t-2))u(t-2) + \frac{1}{2} \cos(2t)$$

Ejercicio 13:

$$q(t) = \frac{1}{1200} \text{sen}(1200t)e^{-500t}$$

$$i(t) = \cos(1200t)e^{-500t} - \frac{5}{12} \text{sen}(1200t)e^{-500t}$$

Ejercicio 14:

$$q(t) =$$

$$\left(\frac{1}{1250000} - \frac{1}{1250000} \cos(1000(t-2))e^{-500(t-2)} - \frac{1}{1250000} \text{sen}(1000(t-2))e^{-500(t-2)} \right) u(t-2) + \cos(1000t)e^{-500t} + \frac{1}{2} \text{sen}(1000t)e^{-500t}$$

$$i(t) = \left(\frac{1}{1250} \text{sen}(1000(t-2))e^{-500(t-2)} - \frac{1}{2500} \cos(1000(t-2))e^{-500(t-2)} - \frac{1}{1250} \cos(1000(t-2))e^{-500(t-2)} + \frac{1}{2500} \text{sen}(1000(t-2))e^{-500(t-2)} \right) u(t-2) - 1250 \text{sen}(1000t)e^{-500t}$$

Ejercicio 15:

$$\text{a) } x(t) = \frac{1}{9}e^{-t} + \frac{8}{9}\cos(3t)e^{-t} + \frac{1}{3}\text{sen}(3t)e^{-t}$$

$$\text{b) } x(t) = \frac{1}{9}e^{-t} - \frac{1}{9}\cos(3t)e^{-t} + \frac{1}{3}\text{sen}(3t)e^{-t}$$

$$\text{c) } x(t) = \frac{1}{9}e^{-t} - \frac{1}{9}\cos(3t)e^{-t}$$

Ejercicio 16:

$$\text{a) } y(t) = te^{-t}$$

$$\text{b) } y(t) = \frac{1}{2}t^2e^{-t}$$

$$\text{c) } y(t) = (1 - e^{-(t-2)})u(t-2)$$

$$\text{d) } y(t) = -e^{-t} + te^{-t} + e^{-2t}$$

$$\text{e) } y(t) = f(t) * e^{-t}t$$

Ejercicio 17:

$$H(s) = \frac{1}{s}$$

Ejercicio 18:

$$\text{a) } H(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$\text{b) } y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\text{sen } t$$

Ejercicio 19:

$$\text{a) } y(t) = 2te^{-3t}$$

$$\text{b) } y(t) = 2e^{-3t} * f(t)$$

Ejercicio 20:

$$f(t) = 4t$$

Ejercicio 21:

$$\text{a) } \begin{cases} x(t) = 1 - \frac{9}{4}\cos t + \frac{5}{4}\text{sen } t \\ y(t) = \text{sen } t \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} - \operatorname{sen} t \\ y(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} + \operatorname{sen} t \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x(t) = \cdots. \\ y(t) = \cdots \end{cases}$$