SERIES DE FOURIER

FUNCIONES PERIÓDICAS

Definición: Diremos que una función $f(t)$ es periódica si está definida sobre $\mathbb{R}$ y existe un valor $T > 0$ tal que se cumple:

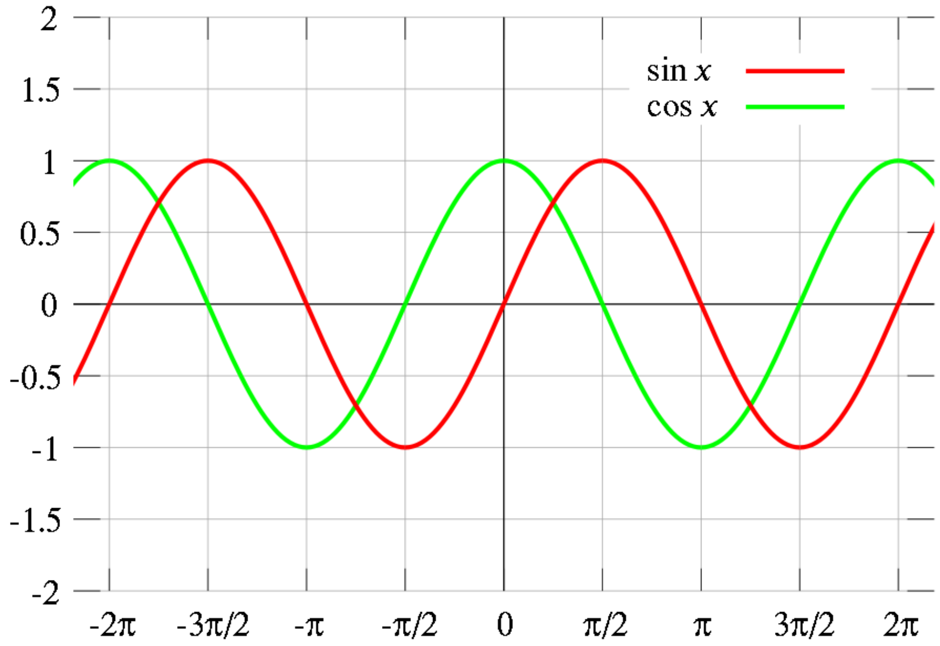
$$f(t+T) = f(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Al mínimo número T que cumple esta condición lo llamaremos periodo de $f(t)$.

Note que una función periódica verifica que

$$f(t+nT) = f(t) \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Luego, la gráfica de esta función se obtiene por repetición periódica de la gráfica en cualquier intervalo de longitud T



FUNCIONES PERIÓDICAS

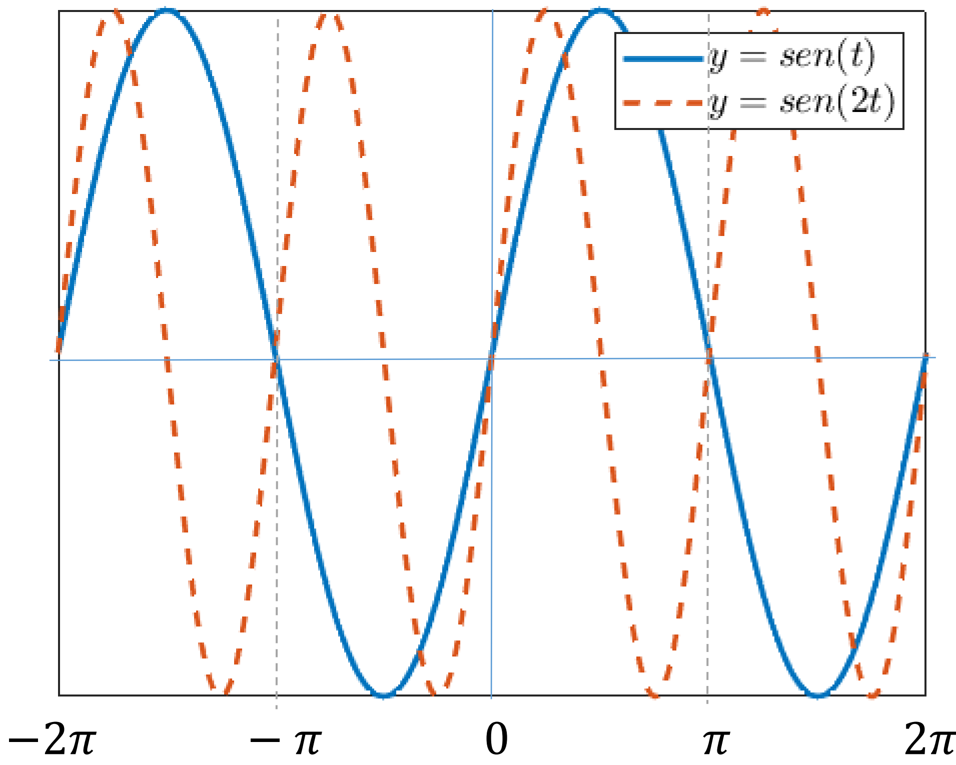
$$f(t) = \text{sen}(t) = \text{sen}(t + 2\pi) = f(t + 2\pi) \qquad T = 2\pi$$

$$f(t) = \text{sen}(2t) = \text{sen}(2t + 2\pi) = \text{sen}\big(2(t + \pi)\big) = f(t + \pi) \qquad T = \pi$$

$$f(t) = \text{sen}(3t) = \text{sen}(3t + 2\pi) = \text{sen}\left(3\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = f\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) \qquad T = \frac{2\pi}{3}$$

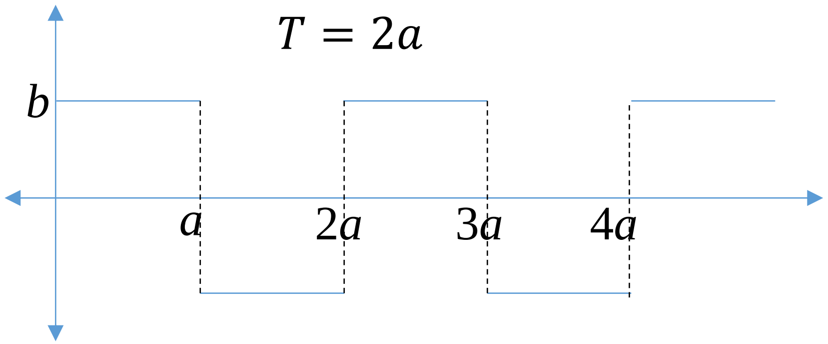
Generalizando

$$f(t) = \text{sen}(\omega_0 t) = \text{sen}(\omega_0 t + 2\pi) = \text{sen}\left(\omega_0\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right) = f\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$



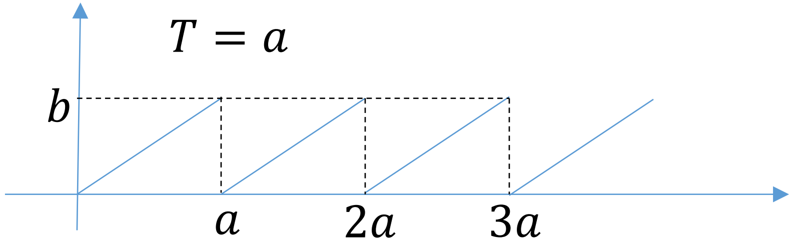
FUNCIONES PERIÓDICAS

Onda cuadrada



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{a}$$

Diente de sierra



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2}{a}\pi$$

FUNCIONES PARES

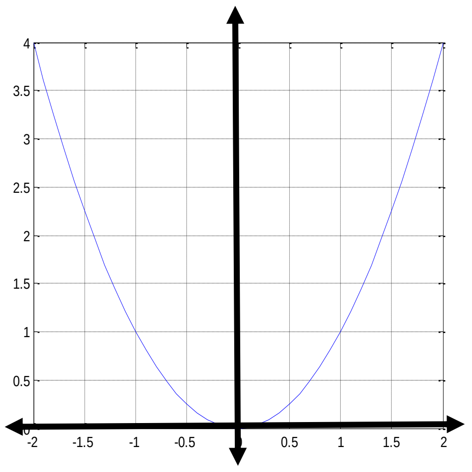
Definición: Una función es Par si se cumple

$$f(t) = f(-t)$$

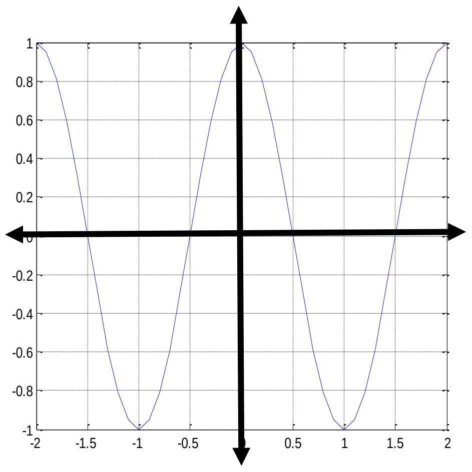
Las funciones pares tienen simetría respecto al eje y.

Ejemplo: $f(t) = \cos(t) \quad , \quad f(t) = t^2 \quad , \quad f(t) = t^4$

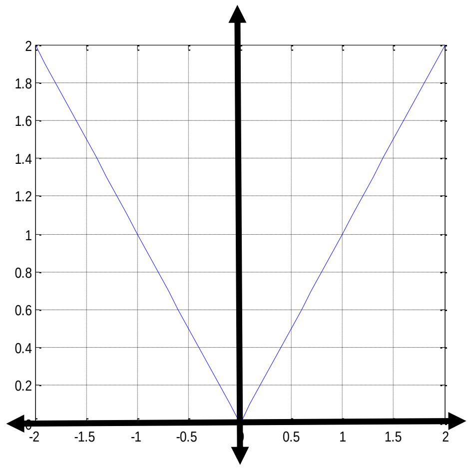
También la combinación lineal de funciones pares es una función par



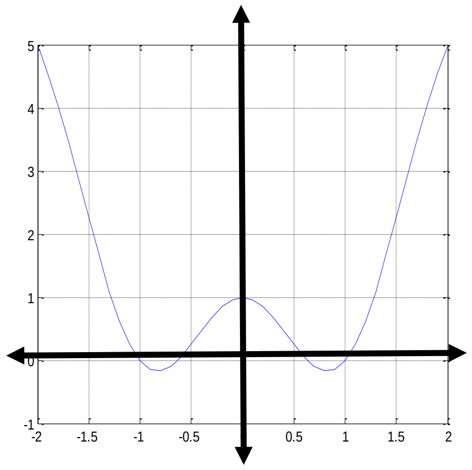
$y = t^2$



$y = \cos(\pi t)$



$y = |x|$



$y = t^2 + \cos(\pi t)$

FUNCIONES IMPARES

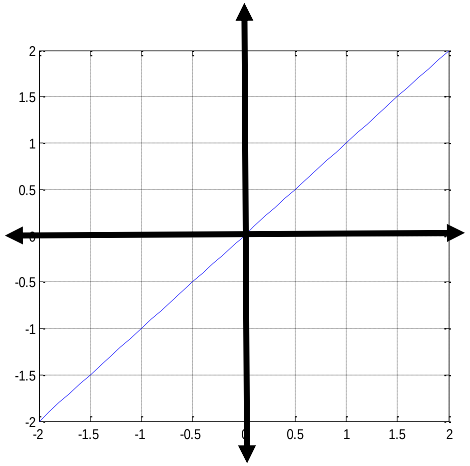
Definición: Una función es Impar si se cumple

$$f(t) = -f(-t)$$

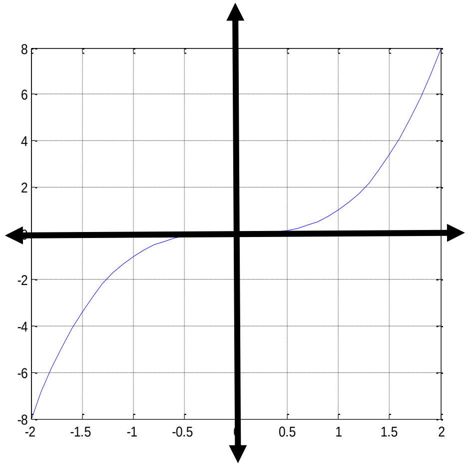
Las funciones impares tienen simetría respecto al origen.

Ejemplo: $f(t) = \mathrm{sen}(t) \quad , \quad f(t) = t^3 \quad , \quad f(t) = t \quad , \quad f(t) = t^5$

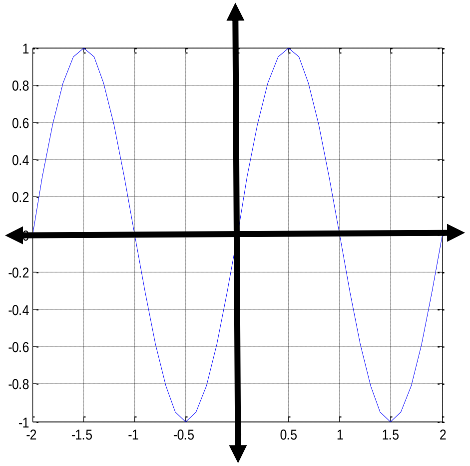
la combinación lineal de funciones impares es una función impar



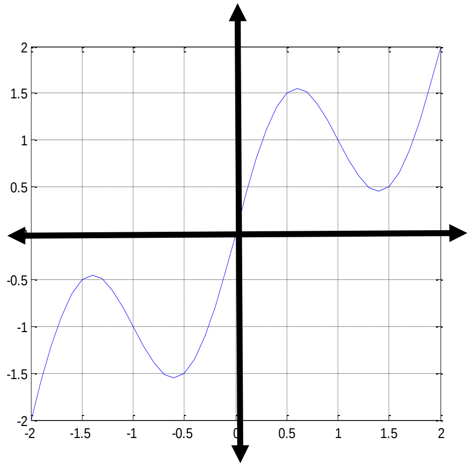
$y = t$



$y = t^3$



$y = \mathrm{sen}(\pi t)$



$y = t + \mathrm{sen}(\pi t)$

FUNCIONES PARES E IMPARES

Propiedad: Toda función $f(t)$ definida sobre los reales se puede descomponer como suma de una función par $f_p(t)$ mas una función impar $f_i(t)$

$$f(t) = f_p(t) + f_i(t)$$

Demostración: Dada una función $f(t)$ se definen

$$f_p(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \qquad f_i(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

Las cuales son par e impar respectivamente, y al sumarlas resulta $f(t)$.

Ejercicio: Proponer una función definida sobre todos los reales y descomponerla como suma de una función par y otra impar

FUNCIONES PARES E IMPARES

Propiedad: (integral sobre intervalos simétricos respecto al origen)

$$\int_{-a}^{a} f_p(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} f_p(t)\,dt$$

$$\int_{-a}^{a} f_i(t)\,dt = 0$$

Propiedad:

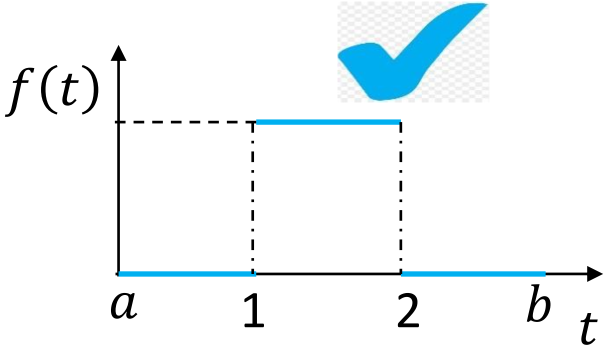
El producto de dos funciones pares es una función par $f_p . f_p = f_p$

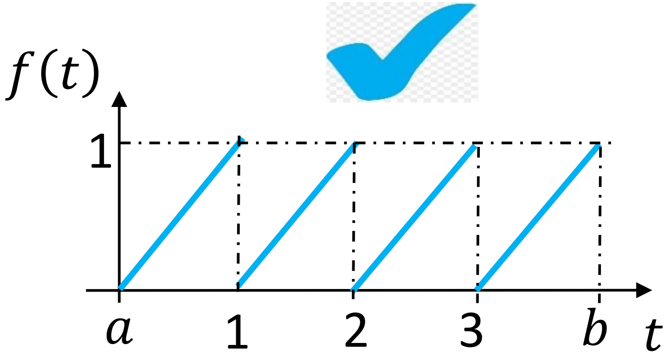
El producto de dos funciones impares es una función par $f_i . f_i = f_p$

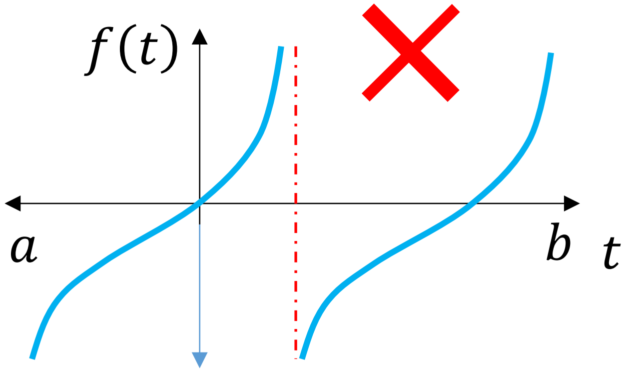
El producto de una función par con una función impar es una función impar $f_p . f_i = f_i$

FUNCIONES CONTINUAS POR PARTES

Definición: Una función es continua por partes en un intervalo $[a, b]$ si es continua en todos los puntos del intervalo excepto en un número finito de puntos, donde debe ser discontinua de salto finito, esto es, debe existir el límite por derecha e izquierda.







SERIES DE FOURIER

Dada una función periódica $f(t)$ de período T, diremos que admite un desarrollo en Serie de Fourier si se puede expresar como suma de senos y coseno de la siguiente manera

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

donde

Coeficientes de Fourier

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

Valor medio de la función

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)\,dt$$

Note que gracias a que se usa $\frac{a_0}{2}$ resulta una fórmula unificada para todos los a_n ya que

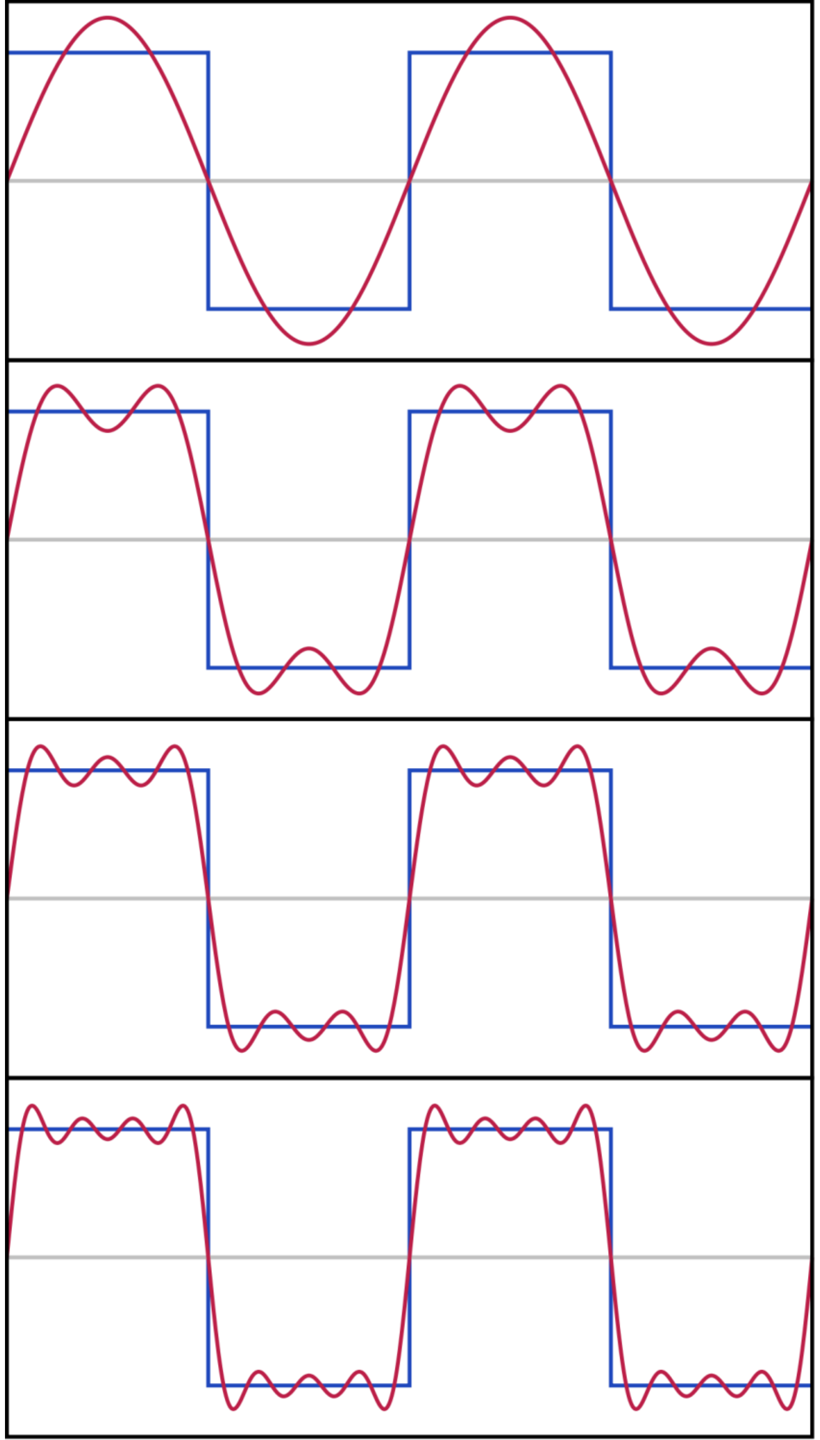
$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(0\omega_0 t)\,dt$$

SERIES DE FOURIER

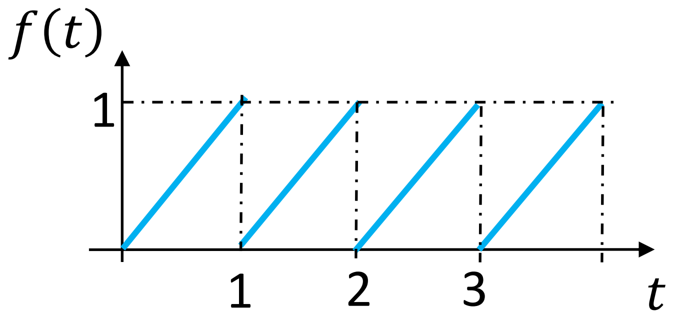
Convergencia: Si $f(t)$ es continua por tramos y periódica de período T. Entonces, la serie de Fourier de $f(t)$ en el intervalo converge a $f(t)$ en todo punto de continuidad. Además, en cada punto de discontinuidad, la serie de Fourier converge al promedio

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

donde $f(t^+)$ y $f(t^-)$ denotan el límite de $f(t)$ en t, por la derecha y por la izquierda, respectivamente.



SERIES DE FOURIER



Ejemplo: Si $f(t) = t$ con $t \in [0,1]$

Se la extiende a todo el dominio real de forma periódica con $T = 1$

Frecuencia angular: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \int_0^1 t\,dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Valor medio de la función

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt = 2\int_0^1 t\cos(n2\pi t)\,dt$$

$$= 2\left[\left. t\,\frac{\operatorname{sen}(n2\pi t)}{n2\pi}\right|_0^1 - \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(n2\pi t)}{n2\pi}dt\right] = \left. t\,\frac{\operatorname{sen}(n2\pi t)}{n\pi}\right|_0^1 + \left.\frac{\cos(n2\pi t)}{2n^2\pi^2}\right|_0^1$$

$$= \left(\frac{\operatorname{sen}(n2\pi)}{n\pi} - 0\right) + \left(\frac{\cos(n2\pi)}{2n^2\pi^2} - \frac{\cos(0)}{2n^2\pi^2}\right) = 0$$

SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Si $f(t) = t$ con $t \in [0,1]$

Ancho del intervalo: $T = 1$

Frecuencia angular: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \qquad a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)\,dt = 2\int_0^1 t\,\mathrm{sen}(n2\pi t)\,dt$$

$$= 2\left[-t\frac{\cos(n2\pi t)}{n2\pi}\Big|_0^1 + \frac{\mathrm{sen}(n2\pi t)}{(n2\pi)^2}\Big|_0^1\right] = \left(-\frac{\cos(n2\pi)}{n\pi} + 0\right) + \left(\frac{\mathrm{sen}(n2\pi)}{2n^2\pi^2} - 0\right) = -\frac{1}{n\pi}$$

SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Si $f(t) = t$ con $t \in [0,1]$

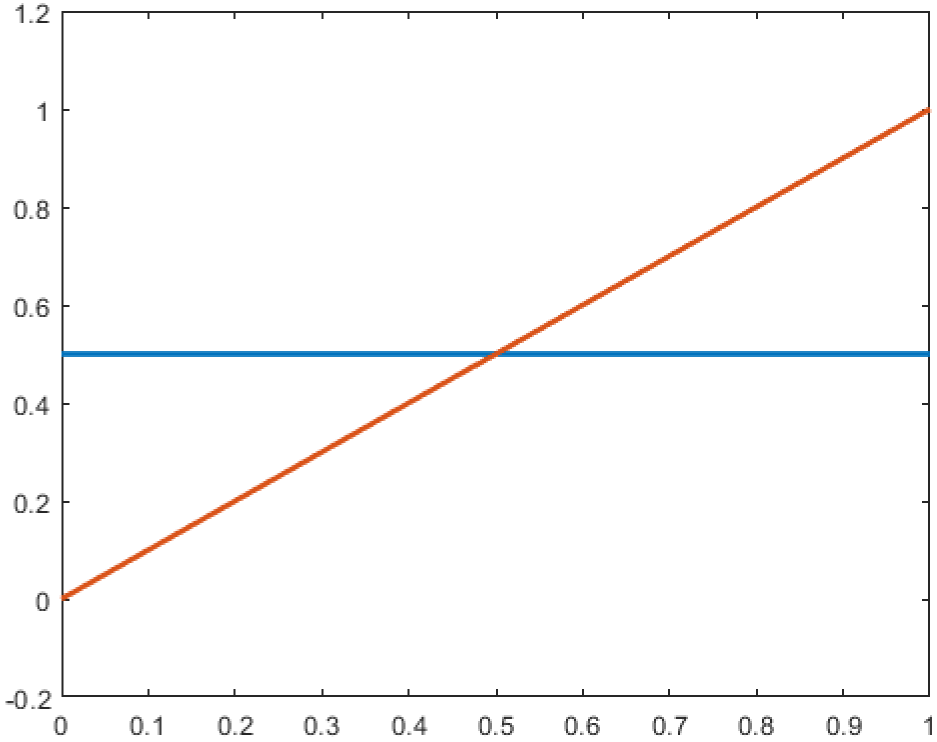
Ancho del intervalo: $T = 1$

Frecuencia angular: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \qquad a_n = 0 \qquad b_n = -\frac{1}{n\pi}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \quad \Longrightarrow \quad f(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(2n\pi t)$$

$$n = 0 \implies f(t) \cong \frac{1}{2}$$



SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Si $f(t) = t$ con $t \in [0,1]$

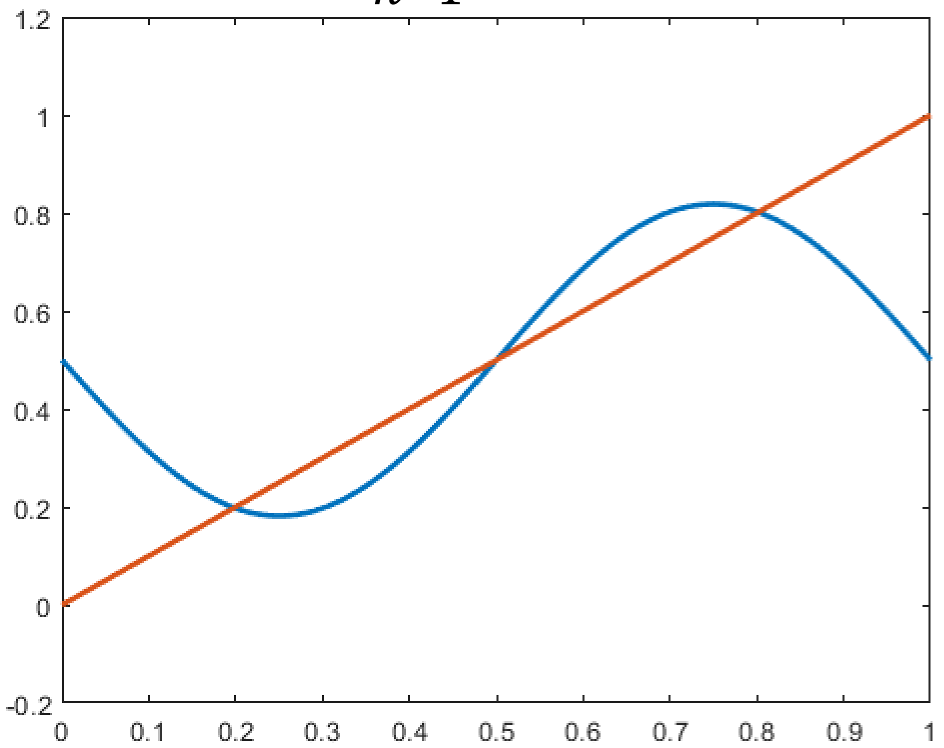
Ancho del intervalo: $T = 1$

Frecuencia angular: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \qquad a_n = 0 \qquad b_n = -\frac{1}{n\pi}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \quad \Longrightarrow \quad f(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(2n\pi t)$$

$$n = 1 \implies f(t) \cong \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\pi t)}{\pi}$$



SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Si $f(t) = t$ con $t \in [0,1]$

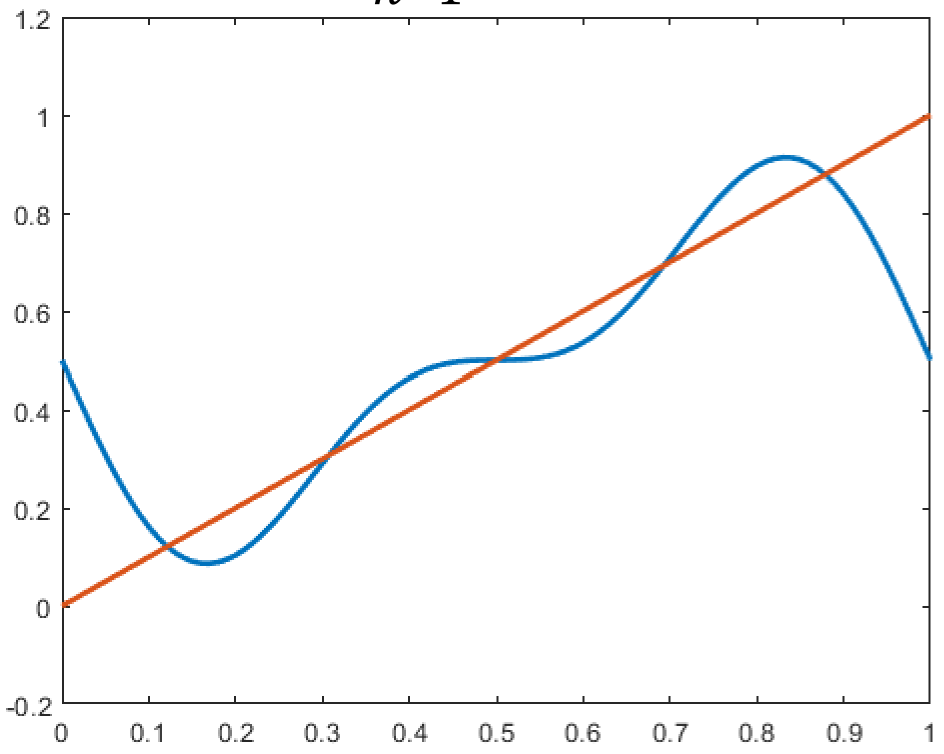
Ancho del intervalo: $T = 1$

Frecuencia angular: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \qquad a_n = 0 \qquad b_n = -\frac{1}{n\pi}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \quad \Longrightarrow \quad f(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(2n\pi t)$$

$$n = 2 \implies f(t) \cong \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\pi t)}{\pi} - \frac{\operatorname{sen}(4\pi t)}{2\pi}$$



SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Si $f(t) = t$ con $t \in [0,1]$

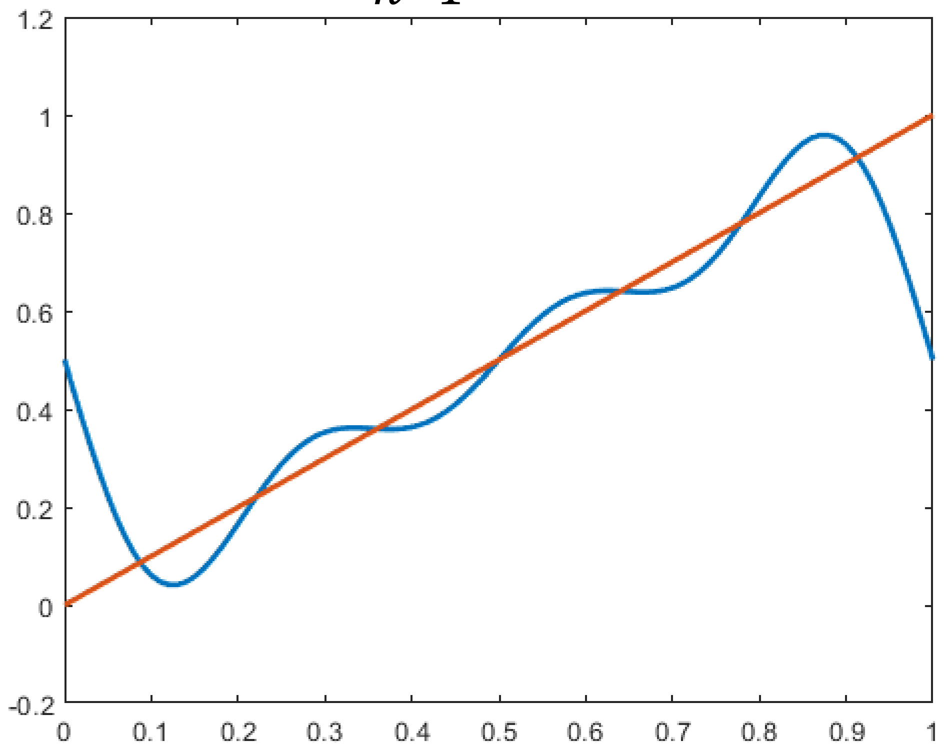
Ancho del intervalo: $T = 1$

Frecuencia angular: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \qquad a_n = 0 \qquad b_n = -\frac{1}{n\pi}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \quad \Longrightarrow \quad f(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(2n\pi t)$$

$$n = 3 \implies f(t) \cong \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\pi t)}{\pi} - \frac{\operatorname{sen}(4\pi t)}{2\pi} - \frac{\operatorname{sen}(6\pi t)}{3\pi}$$



SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Si $f(t) = t$ con $t \in [0,1]$

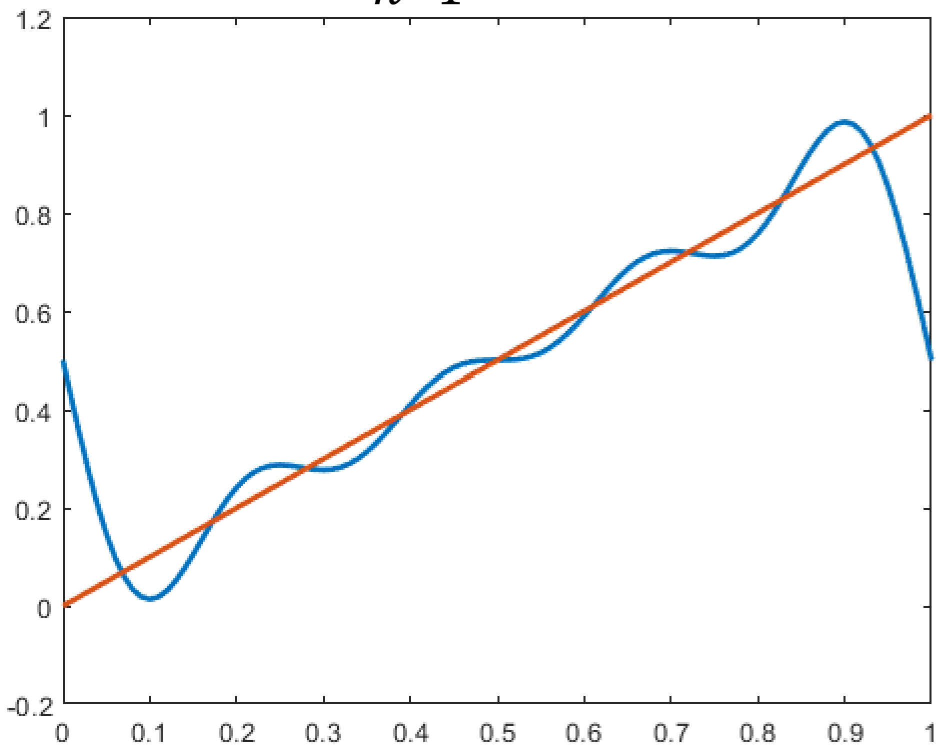
Ancho del intervalo: $T = 1$

Frecuencia angular: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \qquad a_n = 0 \qquad b_n = -\frac{1}{n\pi}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \quad \Longrightarrow \quad f(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(2n\pi t)$$

$$n = 4 \implies f(t) \cong \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\pi t)}{\pi} - \frac{\operatorname{sen}(4\pi t)}{2\pi} - \frac{\operatorname{sen}(6\pi t)}{3\pi} - \frac{\operatorname{sen}(8\pi t)}{4\pi}$$



SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Si $f(t) = t$ con $t \in [0,1]$

Ancho del intervalo: $T = 1$

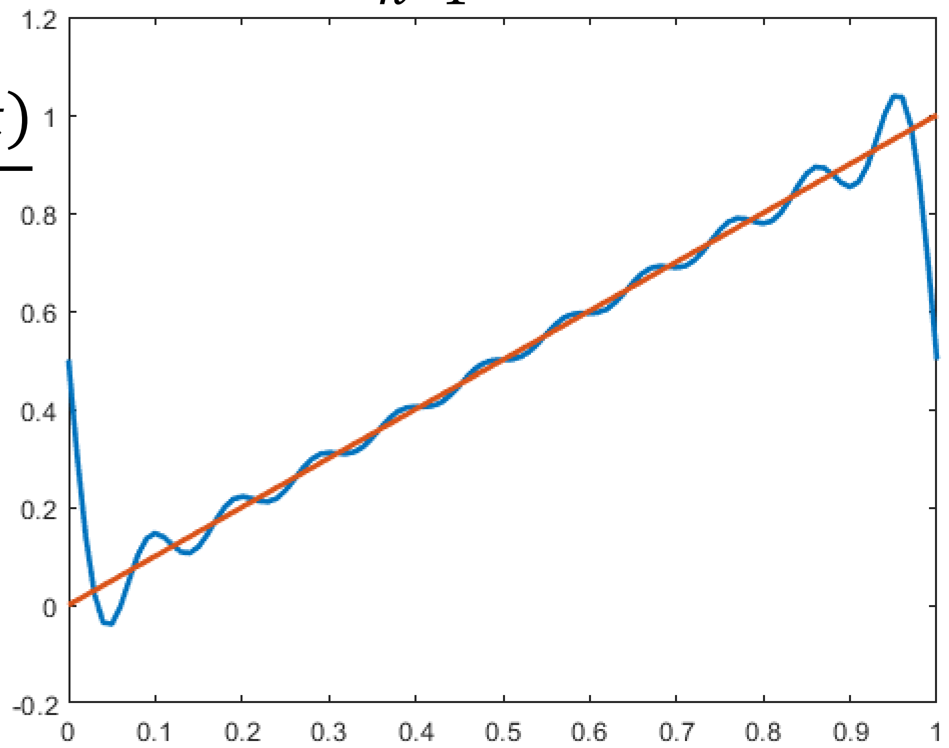
Frecuencia angular: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \qquad a_n = 0 \qquad b_n = -\frac{1}{n\pi}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \quad \Longrightarrow \quad f(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(2n\pi t)$$

$$n = 10 \implies f(t) \cong \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\pi t)}{\pi} - \frac{\operatorname{sen}(4\pi t)}{2\pi} - \frac{\operatorname{sen}(6\pi t)}{3\pi}$$

$$- \frac{\operatorname{sen}(8\pi t)}{4\pi} - \cdots - \frac{\operatorname{sen}(20\pi t)}{10\pi}$$



SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Si $f(t) = t$ con $t \in [0,1]$

Ancho del intervalo: $T = 1$

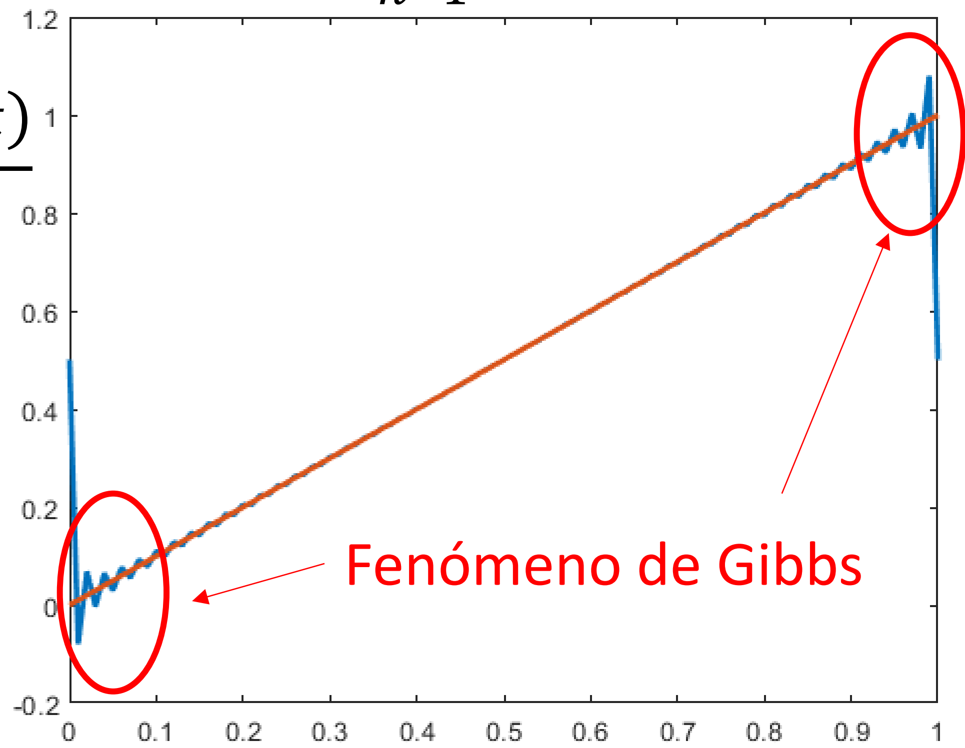
Frecuencia angular: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \qquad a_n = 0 \qquad b_n = -\frac{1}{n\pi}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \quad \Longrightarrow \quad f(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(2n\pi t)$$

$$n = 50 \implies f(t) \cong \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\pi t)}{\pi} - \frac{\operatorname{sen}(4\pi t)}{2\pi} - \frac{\operatorname{sen}(6\pi t)}{3\pi}$$

$$- \frac{\operatorname{sen}(8\pi t)}{4\pi} - \cdots - \frac{\operatorname{sen}(100\pi t)}{50\pi}$$



SERIES DE FOURIER

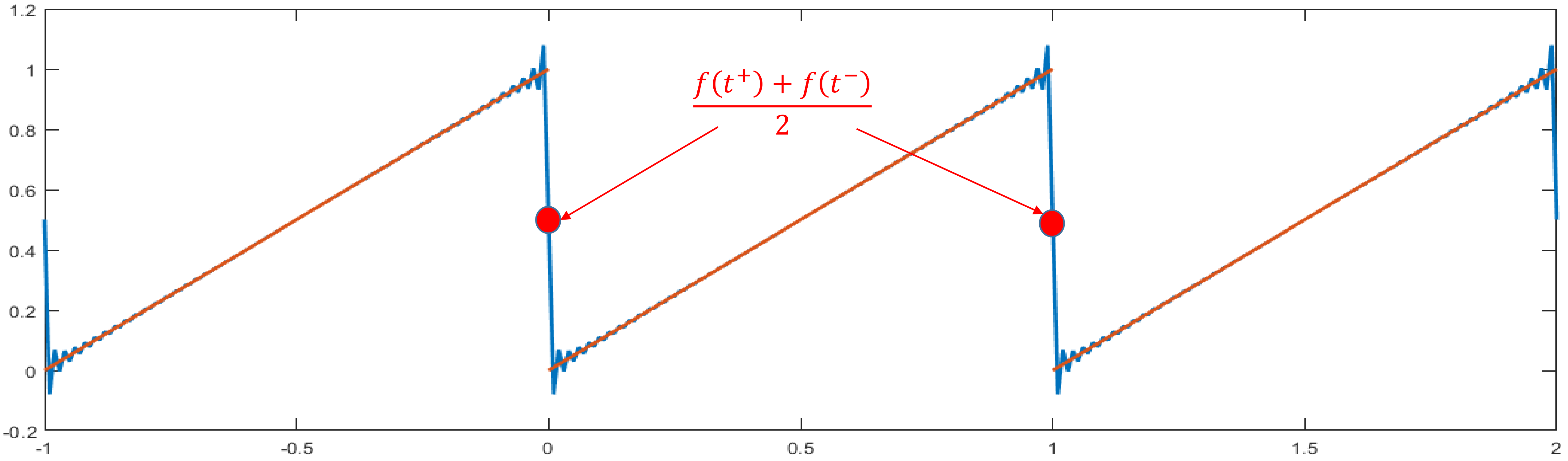
Ejemplo: Si $f(t) = t$ con $t \in [0,1]$

Ancho del intervalo: $T = 1$

Frecuencia angular: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$

$$f(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(2n\pi t)$$

Extensión Periódica



SERIE DE FOURIER DE FUNCIONES PARES

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

GENERAL

FUNCIONES PARES

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{f(t)}_{\text{par}}\, dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_0 t)\, dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{f(t)\cos(n\omega_0 t)}_{\text{par}*\text{par}=\text{par}}\, dt = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega_0 t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{f(t)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)}_{\text{par}*\text{impar}=\text{impar}}\, dt = 0$$

SERIE DE FOURIER DE FUNCIONES IMPARES

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

GENERAL

FUNCIONES IMPARES

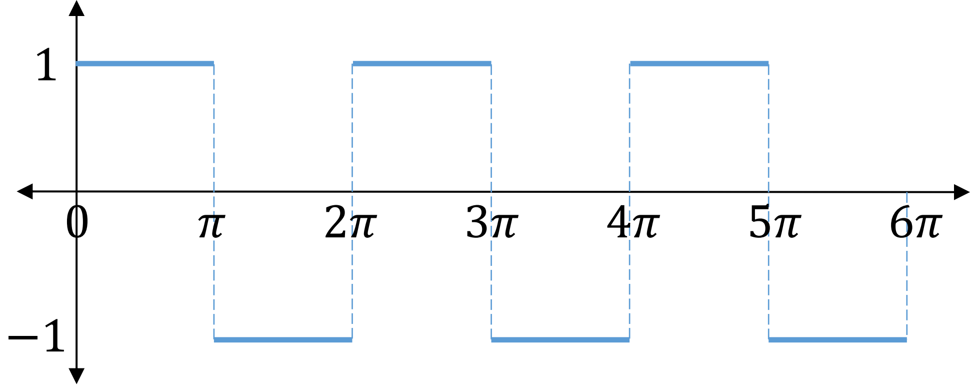
$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \qquad \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{f(t)}_{\text{impar}}\, dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_0 t)\, dt \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{f(t)\cos(n\omega_0 t)}_{\text{impar}*\text{par}=\text{impar}} dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)\, dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{f(t)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)}_{\text{impar}*\text{impar}=\text{par}} dt = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)\, dt$$

SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Hallar el desarrollo de Fourier de la siguiente señal



Es una función periódica con periodo $T = 2\pi$

Frecuencia angular: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$

Si la extendemos a la parte negativa del eje temporal resulta una función impar

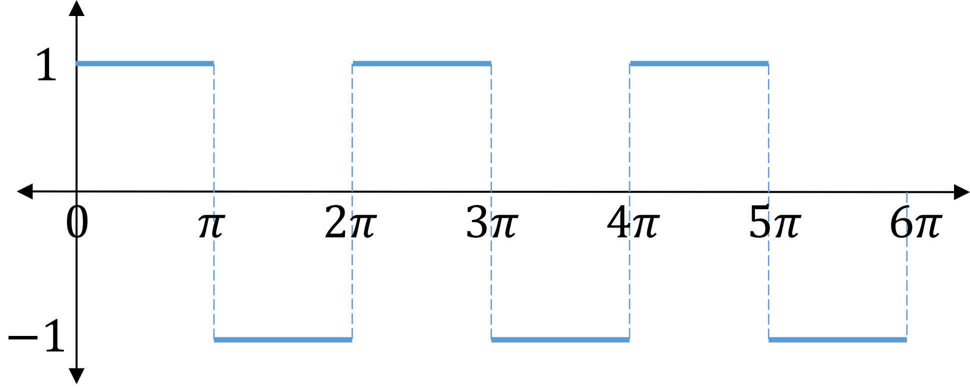
Luego $a_n = 0 \ \ \forall n = 0,1,2,\ldots$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\,\mathrm{sen}(n1t)\,dt = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos(nt)}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi}(-\cos(n\pi)+1)$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}(-(-1)^n+1) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b_{2k} = 0 & \forall k = 1,2,3,\ldots \\ b_{2k-1} = \dfrac{4}{(2k-1)\pi} & \forall k = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Hallar el desarrollo de Fourier de la siguiente señal



$$T = 2\pi;\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$$

$$a_n = 0\ \ \forall n = 0,1,2,\ldots$$

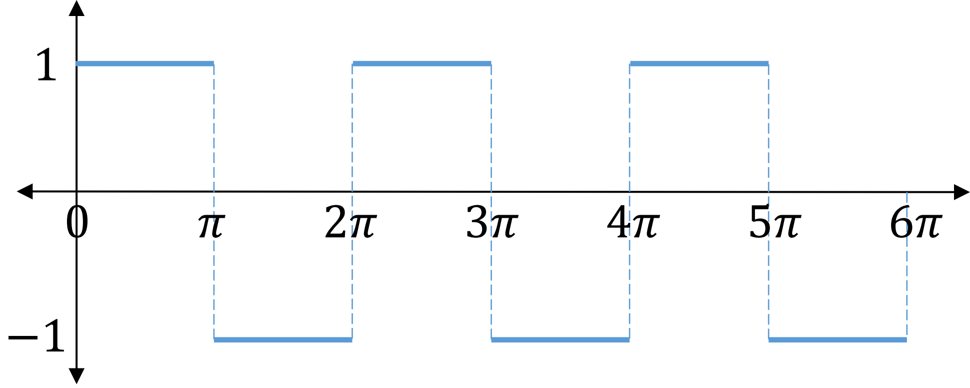
$$\begin{cases} b_{2k} = 0 & \forall k = 1,2,3,\ldots \\ b_{2k-1} = \dfrac{4}{(2k-1)\pi} & \forall k = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nt) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k-1} \operatorname{sen}\big((2k-1)t\big)$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \operatorname{sen}\big((2k-1)t\big) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\big((2k-1)t\big)}{2k-1}$$

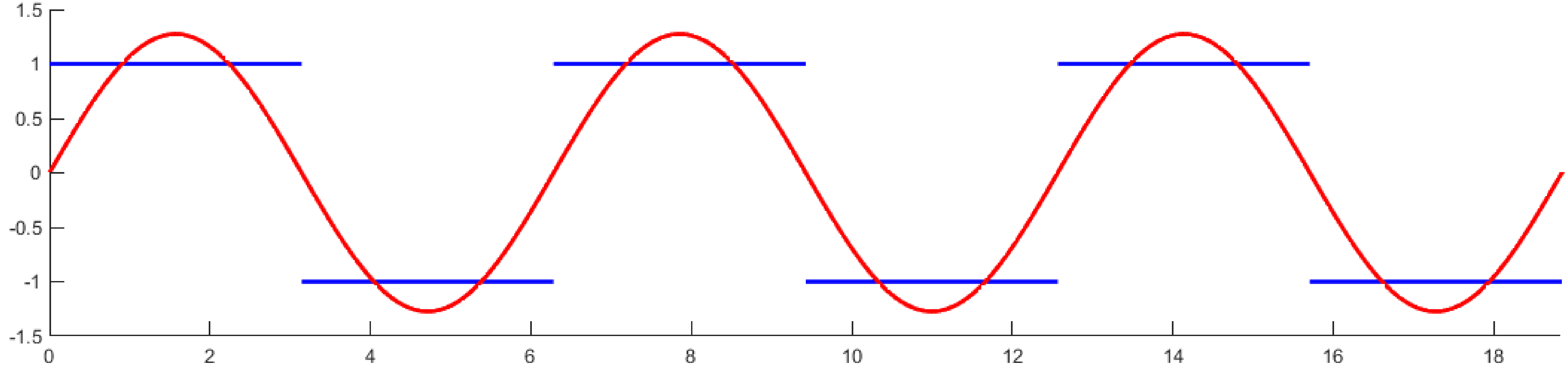
SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Hallar el desarrollo de Fourier de la siguiente señal



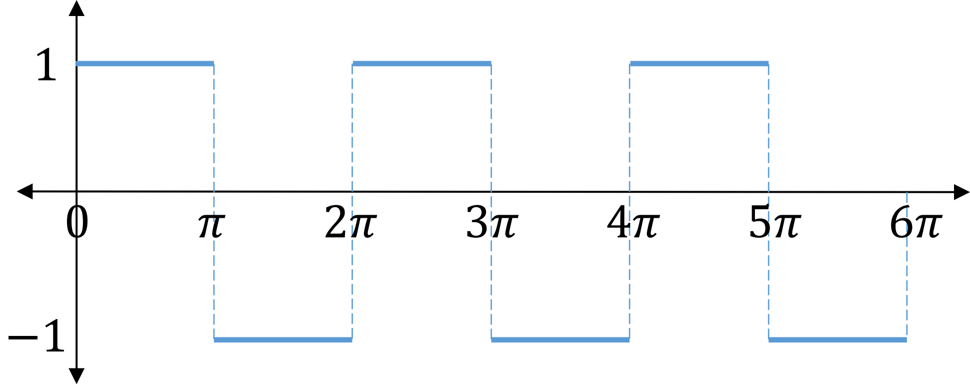
$$f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\big((2k-1)t\big)}{2k-1}$$

$$f(t) \approx S_1 = \frac{4}{\pi}\operatorname{sen}(t)$$



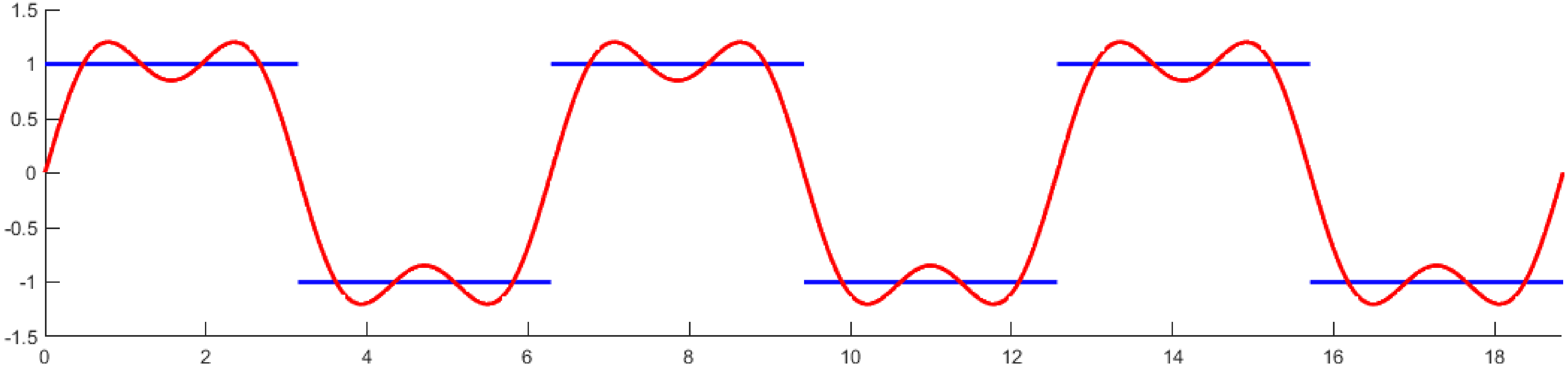
SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Hallar el desarrollo de Fourier de la siguiente señal



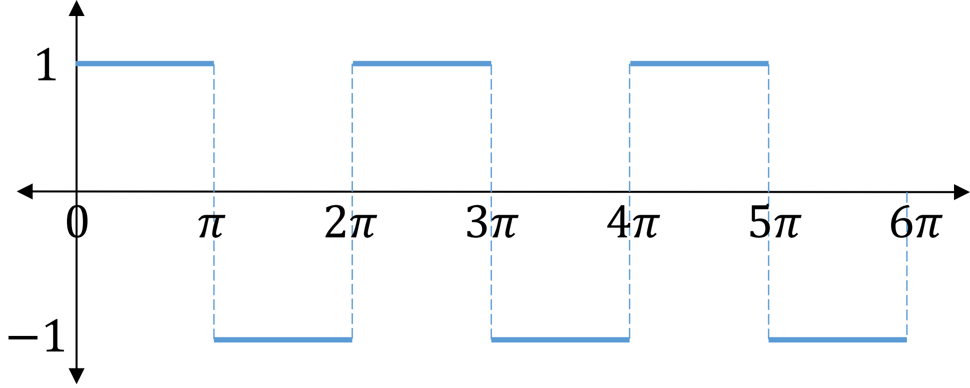
$$f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\big((2k-1)t\big)}{2k-1}$$

$$f(t) \approx S_2 = \frac{4}{\pi}\operatorname{sen}(t) + \frac{4}{3\pi}\operatorname{sen}(3t)$$



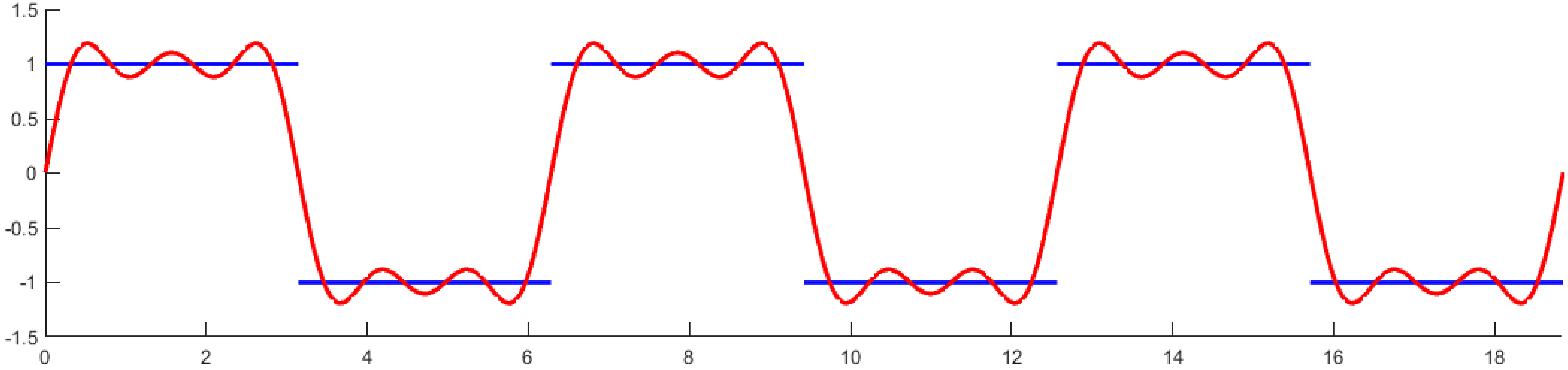
SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Hallar el desarrollo de Fourier de la siguiente señal



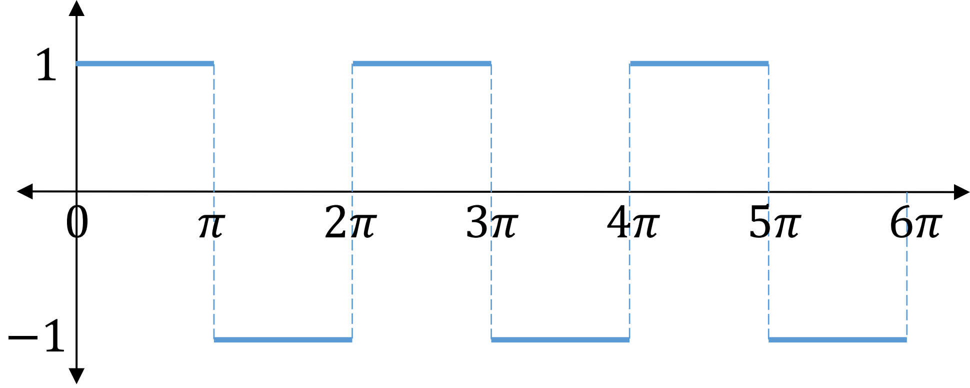
$$f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\big((2k-1)t\big)}{2k-1}$$

$$f(t) \approx S_3 = \frac{4}{\pi}\operatorname{sen}(t) + \frac{4}{3\pi}\operatorname{sen}(3t) + \frac{4}{5\pi}\operatorname{sen}(5t)$$



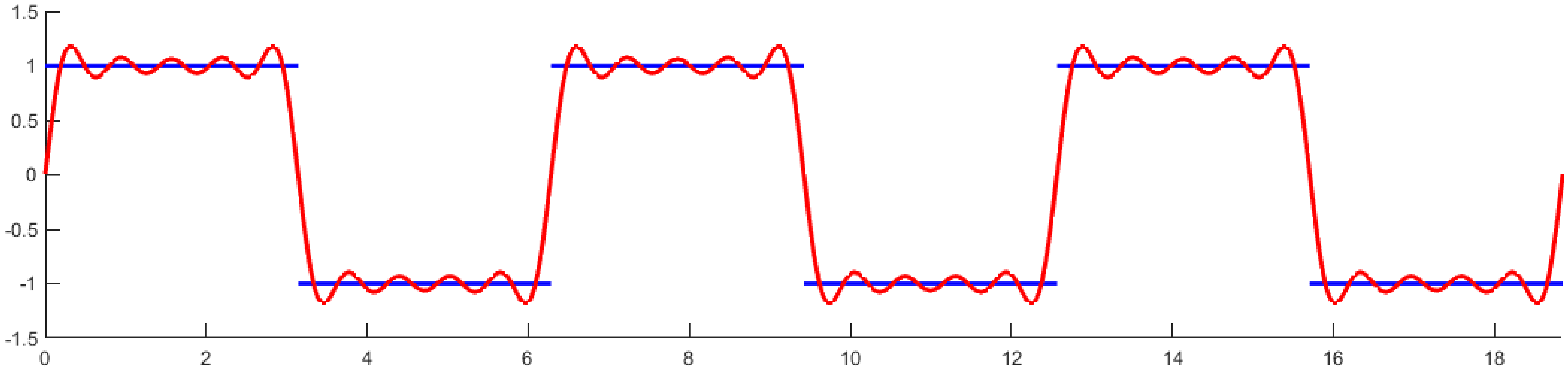
SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Hallar el desarrollo de Fourier de la siguiente señal



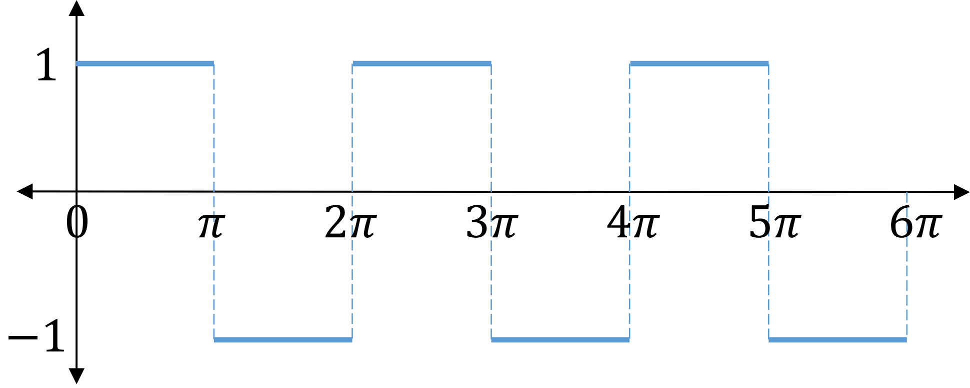
$$f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\big((2k-1)t\big)}{2k-1}$$

$$f(t) \approx S_5 = \frac{4}{\pi}\operatorname{sen}(t) + \frac{4}{3\pi}\operatorname{sen}(3t) + \frac{4}{5\pi}\operatorname{sen}(5t) + \cdots + \frac{4}{9\pi}\operatorname{sen}(9t)$$



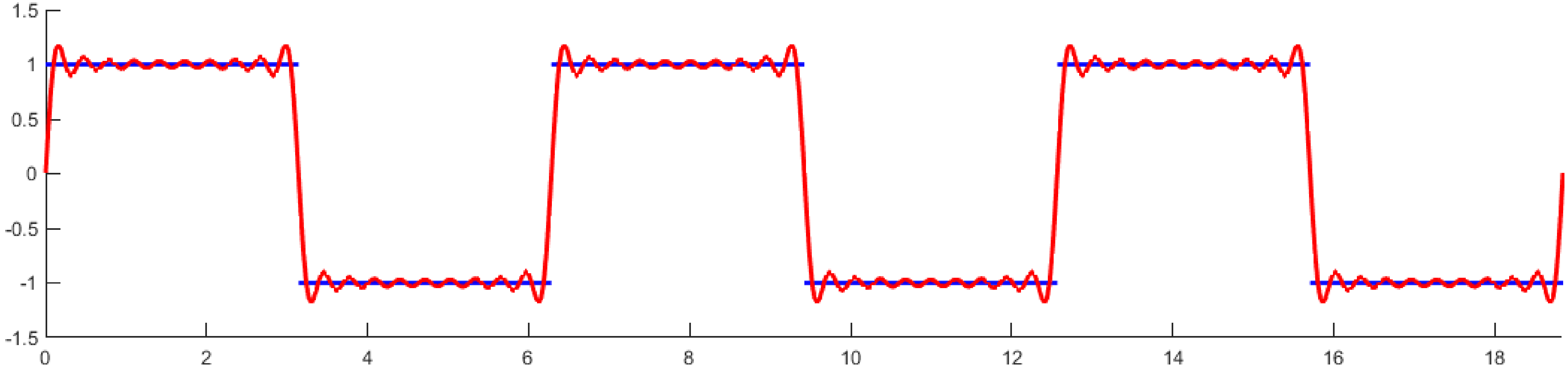
SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Hallar el desarrollo de Fourier de la siguiente señal



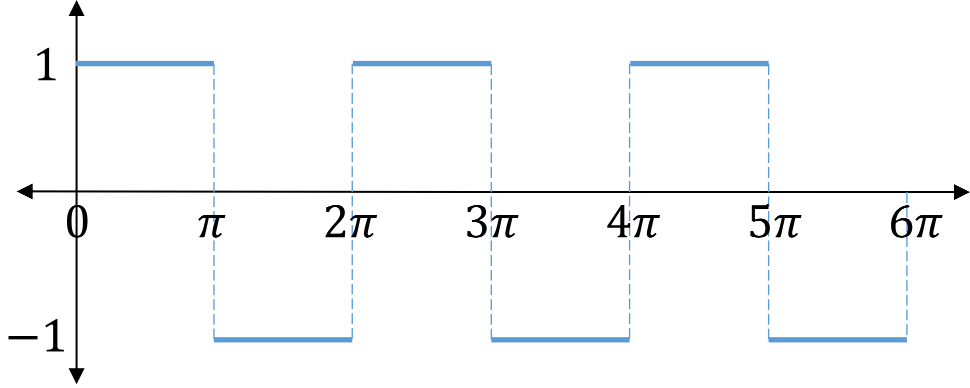
$$f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\big((2k-1)t\big)}{2k-1}$$

$$f(t) \approx S_{10} = \frac{4}{\pi}\mathrm{sen}(t) + \frac{4}{3\pi}\mathrm{sen}(3t) + \frac{4}{5\pi}\mathrm{sen}(5t) + \cdots + \frac{4}{19\pi}\mathrm{sen}(19t)$$



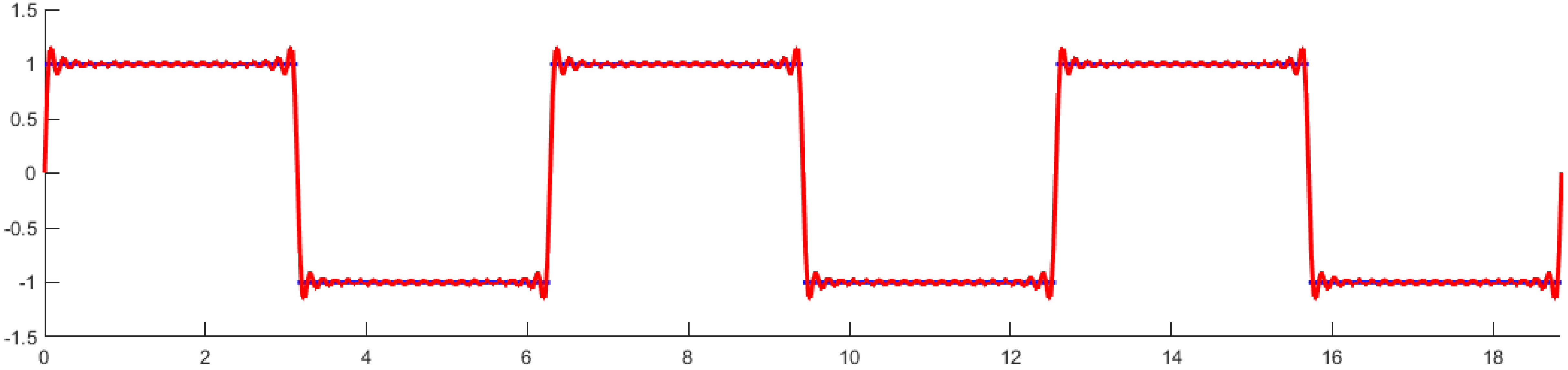
SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Hallar el desarrollo de Fourier de la siguiente señal



$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\big((2k-1)t\big)}{2k-1}$$

$$f(t) \approx S_{20} = \frac{4}{\pi}\text{sen}(t) + \frac{4}{3\pi}\text{sen}(3t) + \frac{4}{5\pi}\text{sen}(5t) + \cdots + \frac{4}{39\pi}\text{sen}(39t)$$



SERIES DE FOURIER COMPLEJA

Recordemos que

$$\left.\begin{aligned} e^{jn\omega_0 t} &= \cos(n\omega_0 t) + j\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t) \\ e^{-jn\omega_0 t} &= \cos(n\omega_0 t) - j\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t) \end{aligned}\right\}$$

sumando: $\frac{1}{2}\left(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}\right) = \cos(n\omega_0 t)$

restando: $\frac{1}{2j}\left(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}\right) = \mathrm{sen}(n\omega_0 t)$

Luego

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)\right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2}\left(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}\right) + \frac{b_n}{2j}\left(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}\right)\right) \\ &= \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{c_0}\underbrace{e^{j0\omega_0 t}}_{=1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\underbrace{\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2j}\right)}_{c_n} e^{jn\omega_0 t} + \underbrace{\left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2j}\right)}_{c_{-n}} e^{-jn\omega_0 t}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

SERIES DE FOURIER COMPLEJA

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

donde, si $n \geq 1$ resulta

$$c_n = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2j} = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt - j\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt - \frac{j}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)(\cos(n\omega_0 t) - j\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t))dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

SERIES DE FOURIER COMPLEJA

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

De igual modo

$$c_{-n} = \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2j} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{jn\omega_0 t}dt$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{j0\omega_0 t}dt$$

En general para todo n

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt}$$

SERIES DE FOURIER CON AMPLITUD Y FASE

Recordemos que

$$\cos(n\omega_0 t - \theta_n) = \cos(n\omega_0 t)\cos(\theta_n) + \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\operatorname{sen}(\theta_n)$$

Luego

$$A_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n) = \underbrace{A_n \cos(\theta_n)}_{a_n = 2\mathrm{Re}(c_n)} \cos(n\omega_0 t) + \underbrace{A_n \operatorname{sen}(\theta_n)}_{b_n = -2\mathrm{Im}(c_n)} \operatorname{sen}(n\omega_0 t)$$

Sumando

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\right)$$

donde la amplitud A_n y la fase θ_n vienen dadas por

$$a_n = A_n \cos(\theta_n)$$
$$b_n = A_n \operatorname{sen}(\theta_n)$$

$$\Rightarrow$$

$$\theta_n = \operatorname{atan}\frac{b_n}{a_n} = \operatorname{atan}\left(-\frac{\mathrm{Im}(c_n)}{\mathrm{Re}(c_n)}\right)$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|c_n|$$

$$A_0 = \frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

SERIES DE FOURIER CON AMPLITUD Y FASE

Recordemos que

$$\operatorname{sen}(n\omega_0 t + \theta_n) = \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\cos(\theta_n) + \cos(n\omega_0 t)\operatorname{sen}(\theta_n)$$

Luego

$$A_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t + \theta_n) = \underbrace{A_n \cos(\theta_n)}_{b_n = -2\mathrm{Im}(c_n)} \operatorname{sen}(n\omega_0 t) + \underbrace{A_n \operatorname{sen}(\theta_n)}_{a_n = 2\mathrm{Re}(c_n)} \cos(n\omega_0 t)$$

Sumando

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t + \theta_n) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t))$$

donde la amplitud A_n y la fase θ_n vienen dadas por

$$a_n = A_n \operatorname{sen}(\theta_n)$$
$$b_n = A_n \cos(\theta_n)$$

$$\Rightarrow$$

$$\theta_n = \operatorname{atan}\frac{a_n}{b_n} = \operatorname{atan}\left(-\frac{\mathrm{Re}(c_n)}{\mathrm{Im}(c_n)}\right)$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|c_n|$$

$$A_0 = \frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$