

**Universidad Nacional de San Juan**

**Facultad de Ingeniería**

**Materia: MATEMÁTICA APLICADA**

**Ingeniería Electromecánica-Ingeniería Mecánica**

*Guía de ejercicios prácticos*

**Docentes de la cátedra:**

**Profesor Titular**

**Dr. Javier Gimenez**

**Profesor Adjunto**

**Dr. Emanuel Tello**

**Jefe de Trabajos Prácticos**

**Ing. Cristian Bustos**

**2025**

Tabla de transformada de Laplace

	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$	<i>Observaciones</i>
1	$a f(t) + b g(t)$	$a F(s) + b G(s)$	Linealidad
2	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$	Cambio de escala
3	$e^{at} f(t)$	$F(s - a)$	Traslación en $s$
4	$f(t - a)u(t - a)$ $a \geq 0$	$e^{-as} F(s)$	Traslación en $t$
5	$f'(t)$ con $f(t)$ continua	$sF(s) - f(0)$	
6	$f^{(n)}(t)$ donde $n$ es el orden de derivación	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$	
7	$\int_0^t f(u) du$	$\frac{F(s)}{s}$	$u$ : variable muda
8	$t^n f(t)$ $n = \text{exponente}$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$	$F^{(n)}(s)$ es la derivada $n$ -ésima de $F(s)$ respecto de $s$
9	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(u) \cdot du$	
10	$t^n$ $n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	
11	$e^{at}$	$\frac{1}{s - a}$	
12	$\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	
13	$\text{cos}(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	
14	$\text{sinh}(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	
15	$\text{cosh}(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	
16	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	Función Escalón unitario de Heaviside
17	$\delta(t - a)$	$e^{-as}$	Función Impulso Unitario (función Delta de Dirac)
18	$f(t) = f(t + T)$	$\frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$	Funciones periódicas $T = \text{período}$

**Teorema del valor Inicial:**  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$

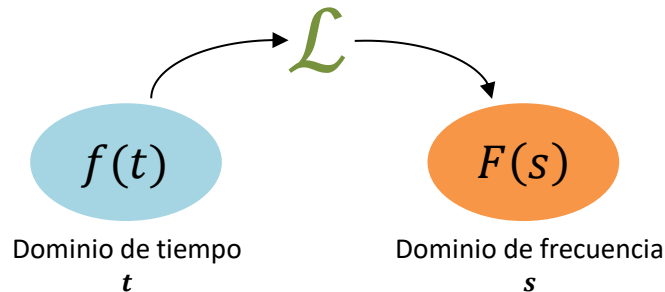
**Teorema del valor Final:**  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

## Transformada de Laplace

Definimos la Transformada de Laplace de  $f(t)$  como

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s)$$

Donde consideraremos a  $s$  una **variable real** y  $e^{-st}$  es llamado **núcleo de la transformación**.



Dado que el límite superior de la integral de la definición es infinito, estamos en presencia de una integral impropia, esto es:

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(t)e^{-st} dt$$

La existencia de la transformada de Laplace está condicionada a si esta integral impropia converge para al menos algunos valores de  $s$ . Es por ello que esta definición la aplicamos a funciones continuas o continuas por partes, de orden exponencial y que tienen valor distinto de cero para  $t \geq 0$ , o sea, funciones causales.

## EJERCICIOS

### PARTE 1: TRANSFORMADA DE LAPLACE

#### Problema resuelto:

Resolver:  $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$  para

$$f(t) = 3t^2 + 2 + te^{-t} + e^{2t}\text{sen}(3t)$$

Solución:  $F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = 3\mathcal{L}(t^2) + 2\mathcal{L}(1) + \mathcal{L}(te^{-t}) + \mathcal{L}(e^{2t}\text{sen}(3t))$  (por prop. 1)

$$\mathcal{L}(t^2) = \frac{2!}{s^3} \quad (\text{por prop. 10})$$

$$\mathcal{L}(1) = \mathcal{L}(t^0) = \frac{0!}{s} = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(e^{-t}) = \frac{1}{(s+1)} \quad (\text{por prop. 11})$$

$$\mathcal{L}(te^{-t}) = -\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s+1} \right) = \frac{1}{(s+1)^2} \quad (\text{por prop. 8})$$

$$\mathcal{L}(\text{sen}(3t)) = \frac{3}{s^2+3^2} \quad (\text{por prop. 12})$$

$$\mathcal{L}(e^{2t}\text{sen}(3t)) = \frac{3}{(s-2)^2+3^2} \quad (\text{por prop. 3})$$

Por lo tanto:

$$F(s) = \frac{6}{s^3} + \frac{2}{s} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{3}{(s-2)^2+9}$$

1) Usando las propiedades indicadas, resolver:

a)  $\mathcal{L}(\cos(at))$  usar propiedad 6 para  $n = 2$

b)  $\mathcal{L}(u(t-a))$  usar propiedades 16 y 4 ó la definición

c)  $\mathcal{L}\left(\frac{\text{sen}(t)}{t}\right)$  usar propiedades 12 y 9

- d)  $\mathcal{L}(\sinh(at))$  usar propiedad 11 recordando que:  $\sinh(at) = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$
- e)  $\mathcal{L}(\cosh(at))$  usar propiedades 5 y 14
- f)  $\mathcal{L}(\sin(at))$  usar propiedades 13 y 7
- g)  $\mathcal{L}(t^2 \cos(at))$  usar propiedades 13 y 8
- h)  $\mathcal{L}(g(t)\delta(t-a))$  usar propiedad 17

2) Aplicar el teorema del valor inicial y del valor final:

- a)  $f(t) = t^2$                       b)  $f(t) = te^{-t}$                       c)  $f(t) = e^{-t}\sin(at)$

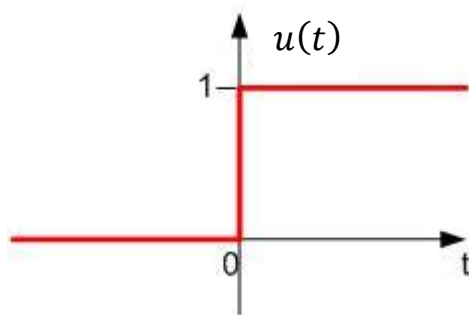
3) El Teorema de Existencia de la Transformada de Laplace brinda una condición suficiente pero no necesaria. Esto es, si una función cumple con las hipótesis (continua por partes y de orden exponencial) entonces existe su transformada, pero si no cumple con dichas hipótesis puede que la transformada exista o no. Verificar esta situación usando algún software online con las funciones

- a)  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$                       b)  $f(t) = \frac{1}{t}$

4) Calcular la transformada de Laplace de:

- a)  $g(t) = t^2 e^{-6t}$
- b)  $g(t) = e^{-2t} \cos(3t)$

La **función escalón unitario** de Heaviside,  $u(t)$ , es muy utilizada en ingeniería, y está definida por:



$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

5) Usando  $a = 2$ , grafique las siguientes funciones sobre el dominio  $t \geq 0$ .

- a)  $u(t-a)$                       b)  $t^2 u(t-a)$                       c)  $(t-a)^2 u(t-a)$ .

**Problema resuelto:**

Sea  $f(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t \leq 1 \\ t & t > 1 \end{cases}$ , encontrar  $F(s)$  utilizando la expresión anterior.

Solución:

$$f(t) = 2t + (t - 2t)u(t - 1) = 2t - tu(t - 1)$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{2}{s^2} - \mathcal{L}(tu(t - 1))$$

Para calcular  $\mathcal{L}(tu(t - 1))$  usaremos la prop. 4 que establece que:

$$\mathcal{L}(f(t - a)u(t - a)) = e^{-as}F(s)$$

Por ello deberemos expresar a la función  $t$  de otra manera, para poder visualizarla como desplazada en una unidad como lo está  $u(t - 1)$ :

$$\mathcal{L}(tu(t - 1)) = \mathcal{L}((t - 1 + 1)u(t - 1)) = \mathcal{L}((t - 1)u(t - 1)) + \mathcal{L}(u(t - 1)) = \frac{1}{s^2}e^{-s} + \frac{1}{s}e^{-s}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{2}{s^2} - e^{-s} \left( \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} \right)$$

6) Calcular la transformada de Laplace de:

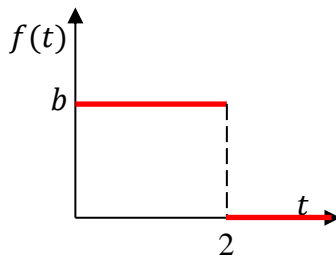
a)  $g(t) = (3t + 1)u(t - 1)$

b)  $g(t) = e^{2-t}u(t - 2)$

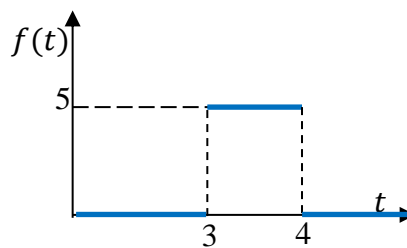
c)  $g(t) = (t^2 - 1)u(t - 1)$

7) En los siguientes problemas formar la expresión analítica de los pulsos y calcular la transformada de Laplace

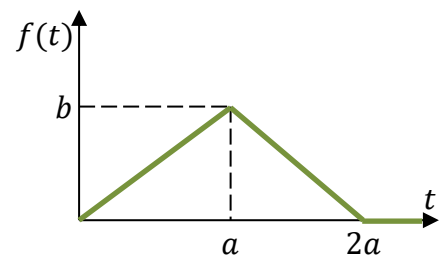
a)



b)



c)



d)  $f(t) = \begin{cases} \text{sen}(t) & \text{si } 0 < t < \pi \\ 0 & \text{si } t > \pi \end{cases}$

e)  $f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } 0 < t < 3 \\ 0 & \text{si } t > 3 \end{cases}$

f)  $f(t) = \begin{cases} t^2 - 4t + 3 & \text{si } 1 < t < 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

g)  $f(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{si } 0 < t < \pi \\ \text{sen}(t) & \text{si } t > \pi \end{cases}$

h)  $f(t) = tu(t - 1) + t^2\delta(t - 1)$

**Problema Resuelto:**

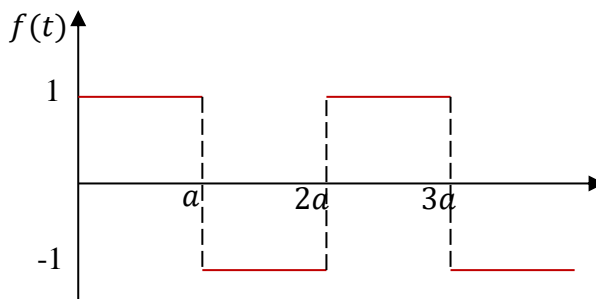
Recordando que la transformada de Laplace de una función periódica  $f(t)$ , con período  $T$  es:

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

Calcular  $F(s)$  de la siguiente función periódica:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < a \\ -1 & a < t < 2a \end{cases}$$

para la cual  $T = 2a$



Solución:

- Método I

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt = \frac{1}{1 - e^{-s2a}} \left\{ \int_0^a e^{-st} 1 dt + \int_a^{2a} e^{-st} (-1) dt \right\} = \\ &= \frac{1}{1 - (e^{-sa})^2} \left( \frac{1 - 2e^{-as} + e^{-2as}}{s} \right) = \frac{(1 - e^{-as})^2}{s(1 - e^{-as})(1 + e^{-as})} = \frac{1}{s} \left[ \frac{e^{\frac{as}{2}} - e^{-\frac{as}{2}}}{e^{\frac{as}{2}} + e^{-\frac{as}{2}}} \right] \\ \therefore F(s) &= \frac{1}{s} \tanh\left(\frac{as}{2}\right) \end{aligned}$$

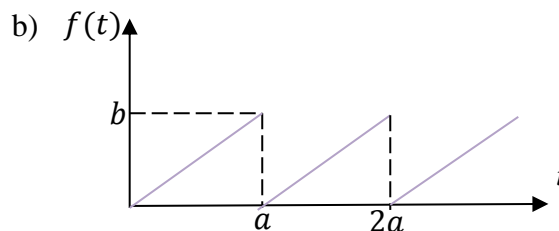
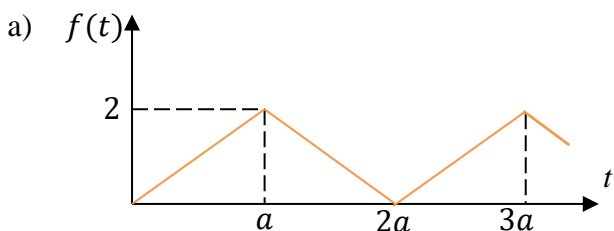
- Método II

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 - 2u(t - a) + 2u(t - 2a) - 2u(t - 3a) + \dots \\ F(s) &= \frac{1}{s} - \frac{2}{s}e^{-as} + \frac{2}{s}e^{-2as} - \frac{2}{s}e^{-3as} + \dots = -\frac{1}{s} + \frac{2}{s} - \frac{2}{s}e^{-as} + \frac{2}{s}e^{-2as} - \frac{2}{s}e^{-3as} + \dots = \\ &= -\frac{1}{s} + \frac{2}{s} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (-e^{-as})^k \right] \end{aligned}$$

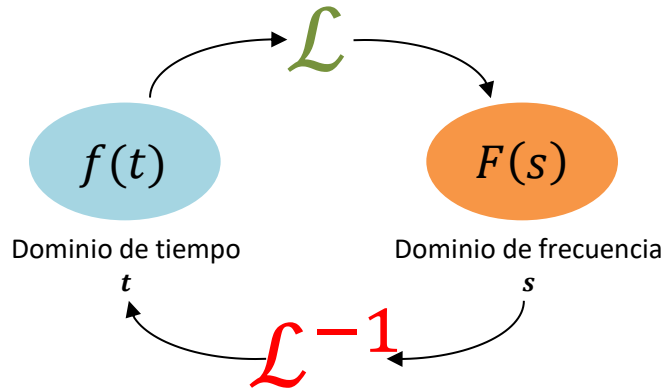
Aparece una serie geométrica de razón  $r = -e^{-as}$  la cual converge a  $\frac{1}{1-r}$  por ser  $|r| = e^{-as} < 1$  ya que  $as > 0$  cuando  $s > 0$ . Luego

$$\begin{aligned} F(s) &= -\frac{1}{s} + \frac{2}{s} \frac{1}{1 + e^{-as}} = \frac{-(1 + e^{-as}) + 2}{s(1 + e^{-as})} = \frac{1[1 - e^{-as}]}{s[1 + e^{-as}]} \\ \therefore F(s) &= \frac{1}{s} \tanh\left(\frac{as}{2}\right) \end{aligned}$$

8) Calcular  $F(s)$  de las siguientes funciones periódicas.



## PARTE 2: ANTITRANSFORMADA DE LAPLACE



9) Usando la tabla, calcular  $\mathcal{L}^{-1}(F(s))$  siguiendo el orden señalado:

a1)  $\frac{1}{s^2}$

a2)  $\frac{1}{(s-2)^2}$

a3)  $\frac{3s}{(s-2)^3}$

a4)  $\frac{e^{-as}}{(s-2)^3}$

b1)  $\frac{1}{s^2+1}$

b2)  $\frac{1}{s^2+4}$

b3)  $\frac{1}{s(s^2+4)}$

b4)  $\frac{e^{-s}}{s(s^2+4)}$

c1)  $\frac{s+2}{(s+2)^2+4}$

c2)  $\frac{s}{s^2+4s+8}$

c3)  $\frac{6s-4}{s^2-4s+20}$

d1)  $\frac{1}{(s+1)^2} = -\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s+1} \right)$

d2)  $\frac{s}{(s^2+a^2)^2} = -\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s^2+a^2} \right)$

### Convolución de funciones:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(x) \cdot g(t-x) dx$$

#### Ejercicio resuelto:

Resolver  $\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2(s+1)} \right]$  usando convolución

Solución:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2(s+1)} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \left( \frac{1}{s^2} \right) \left( \frac{1}{s+1} \right) \right] = t * e^{-t} = \int_0^t x e^{-(t-x)} dx = \\ &= e^{-t} \int_0^t x e^x dx = e^{-t} (x e^x - e^x) \Big|_0^t = t - 1 + e^{-t} \end{aligned}$$

10) Hallar  $\mathcal{L}^{-1}(F(s))$  por convolución:

a) $\frac{1}{(s-a)(s-b)}$ ; con $a \neq b$	b) $\frac{3}{s^2(s^2+9)}$	c) $\frac{8}{s(s+2)}$
d) $\frac{7}{(s-4)^2}$	e) $\frac{1}{s^4}$	f) $\frac{1}{s(s^2+3)}$
g) $\frac{F(s)}{s}$	h) $\frac{1}{(s+2)(s^2+4s+20)}$	

### Fracciones simples o fracciones parciales

Cualquier expresión racional que toma la forma  $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ , donde  $P(s)$  y  $Q(s)$  son polinomios de los cuales el grado de  $Q(s)$  es mayor que el de  $P(s)$ , puede escribirse como la suma de fracciones parciales de la forma:  $\frac{A}{(s-r)^i}$  y  $\frac{Bs+C}{(as^2+bs+c)^i}$ .

Se mostrará con ejemplos cómo se obtienen estos coeficientes  $A, B, C$ , etc.

#### Problema Resuelto:

Luego de descomponer en fracciones simples a  $F(s)$ , se calcula la antitransformada de Laplace de esta expresión.

**Caso A:** Los ceros del denominador son todos números reales.

$$F(s) = \frac{s}{(s-2)^2(s-1)(s+2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s-2)^2} + \frac{D}{s-2} \quad (1)$$

Multiplicando sucesivamente ambos miembros por  $(s-1)$ ,  $(s+2)$ ,  $(s-2)^2$ , y haciendo tender en cada caso  $s \rightarrow 1$ ,  $s \rightarrow -2$ ,  $s \rightarrow 2$ , respectivamente, obtengo  $A, B$  y  $C$ , o sea:

$$A = \lim_{s \rightarrow 1} \left[ \frac{(s-1)s}{(s-2)^2(s-1)(s+2)} \right] = \frac{1}{3}$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -2} \left[ \frac{(s+2)s}{(s-2)^2(s-1)(s+2)} \right] = \frac{1}{24}$$

$$C = \lim_{s \rightarrow 2} \left[ \frac{(s-2)^2 s}{(s-2)^2(s-1)(s+2)} \right] = \frac{1}{2}$$

Para calcular el valor de  $D$  se da cualquier valor a  $s$  en la expresión (1), por ejemplo  $s = 0$ , obteniendo

$$0 = \frac{A}{-1} + \frac{B}{2} + \frac{C}{4} + \frac{D}{-2} \Rightarrow D = -2A + B + \frac{C}{2} = -\frac{9}{24}$$

Otra forma (más conveniente): multiplicando ambos miembros por  $s$  y hacer tender  $s \rightarrow \infty$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = 0 = A + B + D \Rightarrow D = -A - B = -\frac{9}{24}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{24} + \frac{1}{(s-2)^2} + \frac{-9}{s-2}\right) = \frac{1}{3}e^t + \frac{1}{24}e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{2t} - \frac{9}{24}e^{2t} = f(t)$$

**Caso B:** Entre los ceros del denominador existen números complejos conjugados.

$$F(s) = \frac{(s-1)}{(s^2+2s+4)(s+2)} = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs+D}{s^2+2s+4}$$

donde  $A = \lim_{s \rightarrow -2} \left[ \frac{(s+2)(s-1)}{(s^2+2s+4)(s+2)} \right] = -\frac{3}{4}$

Haciendo  $s = 0$   $-\frac{1}{8} = \frac{A}{2} + \frac{D}{4} \Rightarrow D = 1$

Haciendo  $s = 1$   $0 = \frac{A}{3} + \frac{B+D}{7} \Rightarrow B = \frac{3}{4}$

Luego

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{-\frac{3}{4}}{(s+2)} + \frac{\frac{3}{4}s+1}{s^2+2s+4} = -\frac{3}{4(s+2)} + \frac{\frac{3}{4}(s+1) - \frac{3}{4} + 1}{(s+1)^2+3} = \\ &= \frac{-3}{4(s+2)} + \frac{3}{4} \left[ \frac{s+1}{(s+1)^2+3} \right] + \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{(s+1)^2+3} \right] \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = -\frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{3}{4}e^{-t} \cos(\sqrt{3}t) + \frac{1}{4\sqrt{3}}e^{-t} \operatorname{sen}(\sqrt{3}t) = f(t)$$

11) Hallar  $\mathcal{L}^{-1}(F(s))$  :

a)  $F(s) = \frac{2s+1}{(s-1)(s^2-2s-3)}$

f)  $F(s) = \frac{1}{(s-1)^3(s+2)}$

b)  $F(s) = \frac{1}{(s-3)^3(s+2)}$

g)  $F(s) = \frac{1}{(s+1)(s^3+1)}$

c)  $F(s) = \frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)}$

h)  $F(s) = \frac{3s^3-3s^2-40s+36}{(s^2-4)^2}$

d)  $F(s) = \frac{1}{s^3(s+1)}$

i)  $F(s) = \frac{(s-1)e^{-3s}}{(s+2)(s^2+2s+2)}$

e)  $F(s) = \frac{1}{s(s+1)^3}$

### PARTE 3: APLICACIONES A ECUACIONES DIFERENCIALES

#### Problema Resuelto:

$$\text{Resolver: } \begin{cases} y'' + 3y' + 2y = e^{-2t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \quad \text{aplicando la Transformada de Laplace}$$

Solución: Transformando a ambos miembros, usando la notación  $\mathcal{L}(y(t)) = Y(s)$  y la propiedad 6, se puede plantear:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$Y(s) \cdot (s^2 + 3s + 2) - s - 2 - 3 = \frac{1}{s+2}$$

$$Y(s) \cdot (s+2)(s+1) = \frac{1}{s+2} + s + 5$$

$$Y(s) \cdot (s+2)(s+1) = \frac{s^2 + 7s + 11}{s+2}$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + 7s + 11}{(s+2)^2(s+1)} = \frac{A}{(s+2)^2} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+1}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow -2} \left[ \frac{(s+2)^2(s^2 + 7s + 11)}{(s+2)^2(s+1)} \right] = -1$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -1} \left[ \frac{(s+1)(s^2 + 7s + 11)}{(s+2)^2(s+1)} \right] = 5$$

Multiplicando por  $s$  y haciendo  $s \rightarrow \infty$  se obtiene:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = 1 = 0 + B + C \Rightarrow B = 1 - C = -4$$

$$y(t) = -te^{-2t} - 4e^{-2t} + 5e^{-t}$$

#### 12) Problemas Propuestos:

$$\text{a) } \begin{cases} y'' + 5y' + 4y = 20e^t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} y'' + a^2y = f(t) \\ y(0) = A \\ y'(0) = B \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} y'' + 9y = 18t \\ y(0) = 9 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2e^{2t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \\ y''(0) = 6 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} y'' + 4y = f(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad \text{para}$$

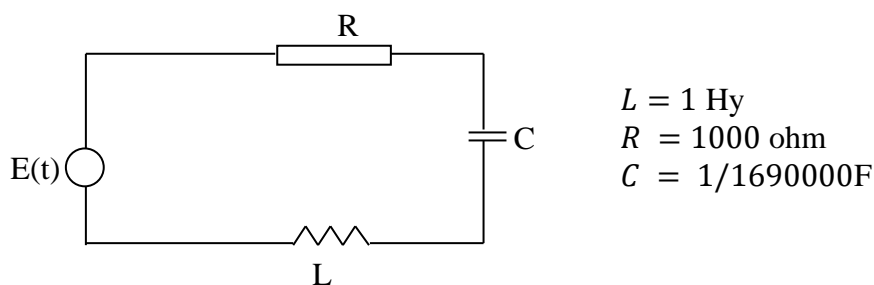
$$\text{i) } f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

$$\text{ii) } f(t) = u(t-2)$$

$$\text{iii) } f(t) = \delta(t)$$

$$\text{iv) } f(t) = \delta(t-2)$$

13) En el instante  $t = 0$  se aplica una FEM impulsiva  $\delta(t)$  al circuito de la figura. Hallar  $i(t)$  sabiendo que las condiciones iniciales son nulas.

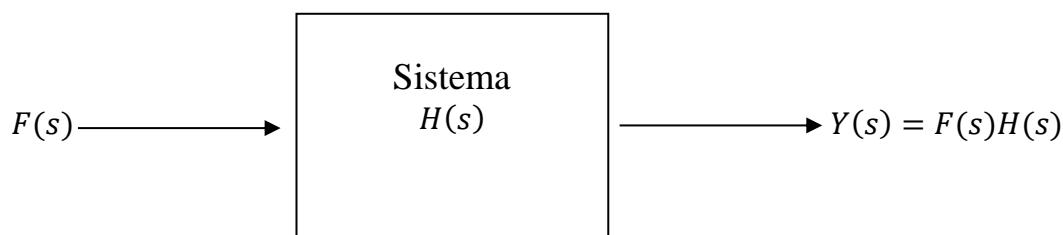
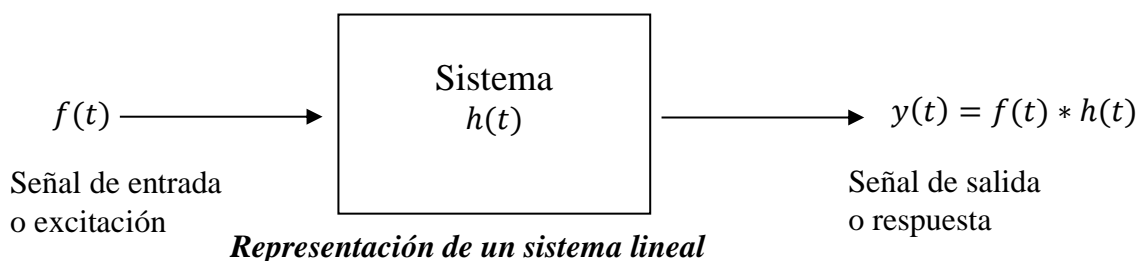


14) Un circuito serie  $RLC$  ( $L = 1, R = 1000, 1/C = 1.250.000$ ) se cierra en  $t = 0$ , siendo la carga en el capacitor  $Q_0 = 1$ . Transcurrido 2 seg. se le aplica una FEM continua de 1 volt. Halle  $q(t)$  e  $i(t)$ .

15) Un sistema masa-resorte tiene una masa = 1, constante de amortiguamiento = 2, constante del resorte = 10, y fuerza externa  $f(t) = e^{-t}$ . Calcular la posición y la velocidad si en  $t = 0$ :

- la masa es retirada una unidad y soltada
- la masa es golpeada desde la posición de equilibrio, imprimiéndole una velocidad unitaria
- las condiciones iniciales son nulas

#### PARTE 4: APLICACIONES A SISTEMAS LINEALES, CAUSALES E INVARIANTES



**Diagrama en bloque de la función de transferencia**

16) Un sistema lineal tiene una función de transferencia:  $H(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$

Encontrar :  $\mathcal{R}(\delta(t))$  ,  $\mathcal{R}(e^{-t})$  ,  $\mathcal{R}(u(t - 2))$  ,  $\mathcal{R}(e^{-2t})$  ,  $\mathcal{R}(f(t))$  .

17) Si  $\mathcal{R}(f(t)) = \int_0^t f(u)du$ . Encontrar  $H(s)$ .

18) Un sistema lineal tiene para una entrada  $f(t) = t$ , una respuesta  $y(t) = t + e^{-t} - 1$ . Se pide:

- a) función de transferencia
- b) respuesta a la entrada  $\text{sen}(t)$

19) De un sistema lineal se conoce  $\mathcal{R}(e^{-t}) = e^{-t} - e^{-3t}$ . Se pide  $\mathcal{R}(e^{-3t})$  y  $\mathcal{R}(f(t))$ .

20) En un sistema lineal la  $\mathcal{R}(\delta(t)) = \frac{1}{2}\text{sen}(2t)$ . Encontrar  $f(t)$  si  $\mathcal{R}(f(t)) = t - \frac{\text{sen}(2t)}{2}$

## PARTE 5: ECUACIONES DIFERENCIALES SIMULTÁNEAS

21) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales

a) 
$$\begin{cases} y' + x'' = 0 & y(0) = 0 & y'(0) = 1 \\ y'' - x' = 0 & x(0) = 2 & x'(0) = 0 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} y'' - x = 0 & y(0) = 1 & y'(0) = 1 \\ x'' - y = 0 & x(0) = 1 & x'(0) = -1 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} y'' - x' - 4y + 2x = \text{sen}(t) & y(0) = y'(0) = x(0) = 0 \\ y'' + 2x' + y = 0 \end{cases}$$

## BIBLIOGRAFÍA

1. Glyn James. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*. 2ªed. México: Pearson Educación, 2002.
2. Erwin Kreyszing. *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. México: Limusa, 1979.
3. Murray R. Spiegel. *Teoría y problemas de Transformadas de Laplace*. México: McGraw-Hill, 1970-1971.
4. Peter V. O'Neil. *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. Cengage Learning

---

## SOLUCIONARIO

---

- **Ejercicio 1**

h)  $g(a)e^{-as}$

- **Ejercicio 2**

a)  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \infty$

$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = 0$

b)  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = 0$

$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = 0$

c)  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = 0$

$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = 0$

- **Ejercicio 3**

a)  $F(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$

b) No existe

- **Ejercicio 4**

a)  $G(s) = \frac{2}{(s+6)^3}$

b)  $G(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2+9}$

- **Ejercicio 5**

Graficar y analizar porque la función el ítem c) es una traslación temporal de la del ítem a)

- **Ejercicio 6**

a)  $G(s) = e^{-s} \left( \frac{3}{s^2} + \frac{4}{s} \right)$

b)  $G(s) = \frac{e^{-2s}}{s+1}$

c)  $G(s) = e^{-s} \left( \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} \right)$

- **Ejercicio 7**

a)  $F(s) = \frac{b}{s} - \frac{b}{s} e^{-2s}$

e)  $F(s) = \frac{1}{s+1} (1 - e^{-3s-3})$

b)  $F(s) = \frac{5}{s} e^{-3s} - \frac{5}{s} e^{-4s}$

f)  $F(s) = e^{-s} \left( \frac{2}{s^3} - \frac{2}{s^2} \right) - e^{-3s} \left( \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} \right)$

c)  $F(s) = \frac{b}{as^2} (1 - 2e^{-as} + e^{-2as})$

g)  $F(s) = \frac{s}{s^2+1} + e^{-\pi s} \left( \frac{s-1}{s^2+1} \right)$

d)  $F(s) = \frac{1}{s^2+1} (1 + e^{-\pi s})$

h)  $F(s) = e^{-s} \left( \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} + 1 \right)$

• **Ejercicio 8**

a)  $F(s) = \frac{2(1-e^{-as})}{as^2(1+e^{-as})}$

b)  $F(s) = \frac{1}{1-e^{-as}} \frac{b}{a} \left( -\frac{as+1}{s^2} e^{-as} + \frac{1}{s^2} \right)$

• **Ejercicio 9**

a1)  $f(t) = t$

a2)  $f(t) = te^{2t}$

a3)  $f(t) = 3te^{2t} + 3t^2e^{2t}$

a4)  $f(t) = \frac{1}{2}e^{2(t-a)}(t-a)^2u(t-a)$

b1)  $f(t) = \text{sen } t$

b2)  $f(t) = \frac{1}{2}\text{sen}(2t)$

b3)  $f(t) = \frac{1}{4}(1 - \cos(2t))$

b4)  $f(t) = \frac{1}{4}(1 - \cos(2(t-1)))u(t-1)$

c1)  $f(t) = e^{-2t} \cos(2t)$

c2)  $f(t) = e^{-2t}(\cos(2t) - \text{sen}(2t))$

c3)  $f(t) = e^{2t}(6 \cos(4t) + 2 \text{sen}(4t))$

d1)  $f(t) = te^{-t}$

d2)  $f(t) = \frac{t}{2a} \text{sen}(at)$

• **Ejercicio 10**

a)  $f(t) = \frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$

b)  $f(t) = -\frac{1}{9}\text{sen}(3t) + \frac{t}{3}$

c)  $f(t) = 4(1 - e^{-2t})$

d)  $f(t) = 7te^{4t}$

e)  $f(t) = \frac{t^3}{6}$

f)  $f(t) = \frac{1}{3}(1 - \cos(\sqrt{3}t))$

g)  $f(t) = \int_0^t f(x)dx$

h)  $f(t) = \frac{1}{16}e^{-2t}(1 - \cos(4t))$

• **Ejercicio 11**

a)  $f(t) = -\frac{3}{4}e^t + \frac{7}{8}e^{3t} - \frac{1}{8}e^{-t}$

b)  $f(t) = \frac{1}{125}e^{3t} - \frac{1}{25}te^{3t} + \frac{1}{10}t^2e^{3t} - \frac{1}{125}e^{-2t}$

c)  $f(t) = \frac{8}{9} + \frac{40}{9}t + \frac{10}{9}\cos(3t) + \frac{50}{27}\text{sen}(3t)$

d)  $f(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} - e^{-t}$

e)  $f(t) = 1 - e^{-t} \left( 1 + t + \frac{t^2}{2} \right)$

f)  $f(t) = \frac{1}{27}e^t - \frac{1}{9}te^t + \frac{1}{6}t^2e^t - \frac{1}{27}e^{-2t}$

g)  $f(t) = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}te^{-t} - \frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{3\sqrt{3}}e^{t/2} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

h)  $f(t) = -2te^{2t} + 3e^{-2t} + 5te^{-2t}$

i)  $f(t) = \left( -\frac{3}{2}e^{-2(t-3)} + \frac{3}{2}e^{-(t-3)} \cos(t-3) - \frac{1}{2}e^{-(t-3)} \text{sen}(t-3) \right) u(t-3)$

- **Ejercicio 12**

a)  $y(t) = 2e^t - 4e^{-t} + 2e^{-4t}$

b)  $y(t) = \frac{f(t)*\text{sen}(at)}{a} + A \cos(at) + \frac{B}{a} \text{sen}(at)$

c)  $y(t) = 9 \cos(3t) - \frac{2}{3} \text{sen}(3t) + 2t$

d)  $y(t) = e^{2t}(t^2 - 6t + 12) + e^t \left( -\frac{1}{2}t^2 - 4t - 11 \right)$

e) i)  $y(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos(2t) + \frac{1}{2} \text{sen}(2t) - \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos(2(t-1)) \right) u(t-1)$

ii)  $y(t) = \frac{1}{4} u(t-2) - \frac{1}{4} \cos(2(t-2)) u(t-2) + \frac{1}{2} \text{sen}(2t)$

iii)  $y(t) = \text{sen}(2t)$

iv)  $y(t) = \frac{1}{2} \text{sen}(2(t-2)) u(t-2) + \frac{1}{2} \text{sen}(2t)$

- **Ejercicio 13**

- $q(t) = \frac{1}{1200} \text{sen}(1200t) e^{-500t}$

- $i(t) = \cos(1200t) e^{-500t} - \frac{5}{12} \text{sen}(1200t) e^{-500t}$

- **Ejercicio 14**

- $q(t) = \left( \frac{1}{1250000} - \frac{1}{1250000} \cos(1000(t-2)) \right) e^{-500(t-2)} - \frac{1}{1250000} \text{sen}(1000(t-2)) e^{-500(t-2)} + \cos(1000t) e^{-500t} + \frac{1}{2} \text{sen}(1000t) e^{-500t}$

- $i(t) = \left( \frac{1}{1250} \text{sen}(1000(t-2)) \right) e^{-500(t-2)} - \frac{1}{2500} \cos(1000(t-2)) e^{-500(t-2)} - \frac{1}{1250} \cos(1000(t-2)) e^{-500(t-2)} + \frac{1}{2500} \text{sen}(1000(t-2)) e^{-500(t-2)} u(t-2) - 1250 \text{sen}(1000t) e^{-500t}$

- **Ejercicio 15**

a)  $x(t) = \frac{1}{9} e^{-t} + \frac{8}{9} \cos(3t) e^{-t} + \frac{1}{3} \text{sen}(3t) e^{-t}$

b)  $x(t) = \frac{1}{9} e^{-t} - \frac{1}{9} \cos(3t) e^{-t} + \frac{1}{3} \text{sen}(3t) e^{-t}$

c)  $x(t) = \frac{1}{9} e^{-t} - \frac{1}{9} \cos(3t) e^{-t}$

- **Ejercicio 16**

a)  $y(t) = t e^{-t}$

b)  $y(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{-t}$

c)  $y(t) = (1 - e^{-(t-2)}) u(t-2)$

d)  $y(t) = -e^{-t} + t e^{-t} + e^{-2t}$

e)  $y(t) = f(t) * e^{-t}$

- **Ejercicio 17**

- $H(s) = \frac{1}{s}$

- **Ejercicio 18**

- a)  $H(s) = \frac{1}{s+1}$

- b)  $y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t$

- **Ejercicio 19**

- a)  $y(t) = 2te^{-3t}$

- b)  $y(t) = 2e^{-3t} * f(t)$

- **Ejercicio 20**

- $f(t) = 4t$

- **Ejercicio 21**

- a)  $\begin{cases} x(t) = 1 - \frac{9}{4}\cos t + \frac{5}{4}\sin t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$

- b)  $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} - \sin t \\ y(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} + \sin t \end{cases}$

- c)  $\begin{cases} x(t) = \dots \\ y(t) = \dots \end{cases}$