

Universidad Nacional de San Juan

Facultad de Ingeniería

MATEMÁTICA APLICADA

Ingeniería Mecánica
Ingeniería Electromecánica

Cálculo Variacional: Semana 3

Equipo de Cátedra

Profesor Titular

Dr. Javier Gimenez

Profesor Adjunto

Dr. Emanuel Tello

Jefe de Trabajos Prácticos

Ing. Cristian Bustos

AÑO 2026

Extremos Condicionados

Se denomina problema variacional condicionado cuando se debe optimizar un funcional de la forma

$$\mathcal{J}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx$$

Sujeto a las condiciones (restricciones, enlaces)

$$\phi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m < n$$

Nota: En lo que sigue supondremos que las m restricciones son independientes y que $m < n$. Esta hipótesis garantiza que las restricciones no determinan completamente a las n funciones incógnitas y que quedan grados de libertad para realizar variaciones admisibles. La condición $m < n$ no significa que un problema con $m \geq n$ carezca necesariamente de sentido. Para $m = n$, las restricciones independientes pueden determinar completamente las funciones admisibles, mientras que para $m > n$ algunas restricciones necesariamente deberán ser dependientes o redundantes.

Este problema se resuelve aplicando el método de Multiplicadores de Lagrange

Método de los multiplicadores de Lagrange

El método consiste en construir una función auxiliar (llamada Función de Lagrange)

$$F^* = F + \sum_{i=1}^m \lambda_i \phi_i$$

donde los λ_i reciben el nombre de Multiplicadores de Lagrange.

Este problema así planteado tiene $m + n$ incógnitas: las n funciones y_j y los m multiplicadores de Lagrange.

Se plantean n ecuaciones de Euler, una para cada y_j

$$F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y'_j}^* = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

y se agregan m condiciones

$$\phi_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$$

Formando un sistema de $m + n$ ecuaciones con $m + n$ incógnitas

$$\begin{cases} F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j'}^* = 0 & \forall j = 1, \dots, n \\ \phi_i = 0 & \forall i = 1, \dots, m \end{cases}$$

Observación

- 1) $m < n$ (nº de enlaces $<$ nº de funciones incógnitas)
- 2) $\lambda = \lambda(x)$ (Puede ser función de x , o constante, pero no es función de y o y')

Demostración: La prueba de este método excede el objetivo del curso, sin embargo, esbozaremos una demostración suponiendo dos variables y una restricción.

El objetivo es entonces optimizar el funcional

$$J(y_1, y_2) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, y_1', y_2') dx$$

sujeto a la restricción

$$\phi(x, y_1, y_2, y_1', y_2') = 0$$

y a las condiciones de contorno

$$y_1(x_0) = y_{10} \quad y_2(x_0) = y_{20} \quad y_1(x_1) = y_{11} \quad y_2(x_1) = y_{21}$$

Consideremos arbitrariamente dos funciones $u_1 = u_1(x)$ y $u_2 = u_2(x)$ diferenciables y acotadas tales que

$$u_1(x_0) = u_1(x_1) = u_2(x_0) = u_2(x_1) = 0$$

Además, asumamos que para $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño

$$\phi(x, y_1 \pm \varepsilon u_1, y_2 \pm \varepsilon u_2, y_1' \pm \varepsilon u_1', y_2' \pm \varepsilon u_2') = 0 \quad (1)$$

Las funciones $y_1 \pm \varepsilon u_1$, $y_2 \pm \varepsilon u_2$ son pequeñas variaciones de las funciones óptimas y_1 , y_2 tales que:

- Satisfacen las condiciones de contorno
- Satisfacen la restricción

Luego, si consideramos la función

$$\Gamma(\varepsilon) = J(y_1 + \varepsilon u_1, y_2 + \varepsilon u_2)$$

resulta que necesariamente $\Gamma'(0) = 0$. Derivando Γ y luego evaluando en $\varepsilon = 0$, se obtuvo anteriormente al analizar el problema sin restricciones que:

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} u_1 \left(\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_1'} \right) dx + \int_{x_0}^{x_1} u_2 \left(\frac{\partial F}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_2'} \right) dx \quad (2)$$

Aquí se obtiene el mismo resultado con el mismo procedimiento, pero no se puede usar que las funciones u_i son totalmente arbitrarias ya que hay una dependencia entre ellas dada por la restricción (1). Luego

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d\phi}{d\varepsilon} = & u_1 \frac{\partial \phi}{\partial y_1} (x, y_1 + \varepsilon u_1, y_2 + \varepsilon u_2, y_1' + \varepsilon u_1', y_2' + \varepsilon u_2') \\ & + u_1' \frac{\partial \phi}{\partial y_1'} (x, y_1 + \varepsilon u_1, y_2 + \varepsilon u_2, y_1' + \varepsilon u_1', y_2' + \varepsilon u_2') \\ & + u_2 \frac{\partial \phi}{\partial y_2} (x, y_1 + \varepsilon u_1, y_2 + \varepsilon u_2, y_1' + \varepsilon u_1', y_2' + \varepsilon u_2') \\ & + u_2' \frac{\partial \phi}{\partial y_2'} (x, y_1 + \varepsilon u_1, y_2 + \varepsilon u_2, y_1' + \varepsilon u_1', y_2' + \varepsilon u_2') \end{aligned}$$

Evaluando en $\varepsilon = 0$, evitando el argumento $(x, y_1, y_2, y_1', y_2')$ por simplicidad, resulta

$$0 = u_1 \frac{\partial \phi}{\partial y_1} + u_1' \frac{\partial \phi}{\partial y_1'} + u_2 \frac{\partial \phi}{\partial y_2} + u_2' \frac{\partial \phi}{\partial y_2'}$$

Multipliquemos esta expresión por una nueva función $\lambda = \lambda(x)$ hasta el momento desconocida pero que determinaremos más adelante, e integremos:

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \left(u_1 \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y_1} + u_1' \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y_1'} \right) dx + \int_{x_0}^{x_1} \left(u_2 \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y_2} + u_2' \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y_2'} \right) dx$$

Análogamente a lo hecho anteriormente, integrando por partes los segundos términos y usando que las funciones u_i se anulan en x_0 y x_1 , resulta que

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \left(\lambda \frac{\partial \phi}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{\partial \phi}{\partial y_1'} \right) \right) u_1 dx + \int_{x_0}^{x_1} \left(\lambda \frac{\partial \phi}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{\partial \phi}{\partial y_2'} \right) \right) u_2 dx \quad (3)$$

Sumando (2) y (3), resulta

$$\begin{aligned} 0 = \int_{x_0}^{x_1} u_1 \left(\left(\frac{\partial F}{\partial y_1} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y_1} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y_1'} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y_1'} \right) \right) dx \\ + \int_{x_0}^{x_1} u_2 \left(\left(\frac{\partial F}{\partial y_2} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y_2} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y_2'} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y_2'} \right) \right) dx \end{aligned}$$

Definiendo la función de Lagrange $F^* = F + \lambda \phi$ resulta

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} u_1 \left(\frac{\partial F^*}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F^*}{\partial y_1'} \right) dx + \int_{x_0}^{x_1} u_2 \left(\frac{\partial F^*}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F^*}{\partial y_2'} \right) dx \quad (4)$$

Si bien solo una de las funciones u_i se puede elegir libremente, ahora contamos con la función λ que también podemos elegir libremente. Estos dos grados de libertad coinciden con la cantidad de integrales en (4), las cuales nos permitirán obtener las EE con las que se resuelve el problema.

Hasta ahora no hemos fijado la función $\lambda = \lambda(x)$, por lo que la definiremos convenientemente con el fin de anular una de las integrales de (4). Supongamos que queremos anular la primera integral (el análisis considerando la segunda integral es análogo), para ello es suficiente con pedir que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^*}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F^*}{\partial y_1'} &= 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial y_1} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y_1} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y_1'} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y_1'} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda' \frac{\partial \phi}{\partial y_1'} + \lambda \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial \phi}{\partial y_1'} - \frac{\partial \phi}{\partial y_1} \right) &= \frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_1'} \end{aligned}$$

Luego, $\lambda = \lambda(x)$ se fija a partir de ahora como la solución de esta EDO lineal de primer orden. Luego (3) se reduce a

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} u_2 \left(\frac{\partial F^*}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F^*}{\partial y_2'} \right) dx$$

Ahora coincide la cantidad de grados de libertad que tenemos ($n - m = 2 - 1 = 1$) con la cantidad de integrales a anular.

Suponiendo que u_2 se elige libremente (luego u_1 se calcula usando la restricción), resulta que debemos exigir que

$$\frac{\partial F^*}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F^*}{\partial y_2'} = 0$$

En otras palabras, en (4) teníamos dos integrales para anular. Una se anula definiendo la función $\lambda = \lambda(x)$ adecuadamente, y la otra se anuló gracias a que podíamos variar arbitrariamente a sólo una de las funciones: $u_1 = u_1(x)$ o $u_2 = u_2(x)$. Análogamente se podría haber anulado primero la segunda integral y luego la primera.

En ambos casos resulta que debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} F_{y_1}^* - \frac{d}{dx} F_{y_1'}^* = 0 \\ F_{y_2}^* - \frac{d}{dx} F_{y_2'}^* = 0 \\ \phi = 0 \end{cases}$$

El sistema está compuesto por la restricción, y las EE para y_1 y para y_2 usando el funcional F^* .

Ejemplo 1: Hallar la extremal de

$$J(y, z) = \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} + zy' + \frac{z'^2}{2} \right) dx$$

sujeta a

$$z - y' = 0$$

Con las condiciones: $y(0) = 1$ $y(1) = e^{-1}$ $z(0) = -1$ $z(1) = -e^{-1}$

Solución:

$$F(x, y, z, y', z') = \frac{y^2}{2} + zy' + \frac{z'^2}{2}$$

$$\phi = z - y' = 0$$

Formamos la Función de Lagrange

$$F^* = F + \lambda\phi = \frac{y^2}{2} + zy' + \frac{z'^2}{2} + \lambda(z - y')$$

La E.E. correspondiente para y es

$$F_y^* - \frac{d}{dx}(F_{y'}^*) = 0$$

$$F_y^* = y \quad F_{y'}^* = z - \lambda \quad \frac{d}{dx}(F_{y'}^*) = z' - \lambda'$$

Reemplazando en la E.E. queda

$$y - z' + \lambda' = 0$$

La E.E. correspondiente a z es:

$$F_z^* - \frac{d}{dx}(F_{z'}^*) = 0$$

$$F_z^* = y' + \lambda \quad F_{z'}^* = z' \quad \frac{d}{dx}(F_{z'}^*) = z''$$

Reemplazando en la E.E. queda

$$y' + \lambda - z'' = 0$$

Con las EE y la ecuación de ligadura se forma el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (y, z, λ)

$$\begin{cases} y - z' + \lambda' = 0 & (1) \\ y' + \lambda - z'' = 0 & (2) \\ z - y' = 0 & (3) \end{cases}$$

Para resolver el sistema conviene despejar λ de (2) y z de (3), derivar y reemplazar en (1), para que de esta manera todo queda en función de y

$$\begin{array}{lcl} \lambda = z'' - y' & \Rightarrow & \lambda' = z''' - y'' = y^{IV} - y'' \\ z = y' & & z' = y'' \end{array}$$

Reemplazando estas expresiones en (1) resulta:

$$y - y'' + (y^{IV} - y'') = 0$$

$$y^{IV} - 2y'' + y = 0$$

Se obtiene una EDO lineal homogénea de orden cuatro, cuya ecuación característica es:

$$r^4 - 2r^2 + 1 = 0$$

$$(r^2 - 1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} r_{1,2} = 1 \text{ (doble)} \\ r_{3,4} = -1 \text{ (doble)} \end{array}$$

La solución general será

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 x e^x + C_4 x e^{-x}$$

$$z = y' = (C_1 + C_3) e^x + (C_4 - C_2) e^{-x} + C_3 x e^x - C_4 x e^{-x}$$

Aplicando las condiciones de contorno

$$y(0) = 1 = C_1 + C_2$$

$$y(1) = e^{-1} = C_1 e + C_2 e^{-1} + C_3 e + C_4 e^{-1}$$

$$z(0) = -1 = C_1 + C_3 + C_4 - C_2$$

$$z(1) = -e^{-1} = C_1 e + C_3 e + C_4 e^{-1} - C_2 e^{-1} + C_3 e - C_4 e^{-1}$$

Resolviendo

$$C_1 = C_3 = C_4 = 0 \quad C_2 = 1$$

La solución es

$$\boxed{\begin{cases} y = e^{-x} \\ z = -e^{-x} \end{cases}}$$

Ejemplo 2: Hallar la extremal de

$$J(y, z) = \int_0^1 (2z - y' z'') dx$$

sujeta a la condición

$$z' = y$$

Siendo las Condiciones de Contorno

$$y(0) = z(0) = z(1) = 0 \quad y(1) = 1/24$$

Solución:

a) Se construye la Función de Lagrange

$$F^* = 2z - y'z'' + \lambda(z' - y)$$

b) Se forman las Ecuaciones de Euler

Para y

$$F_y^* - \frac{d}{dx}(F_{y'}^*) = 0$$
$$-\lambda - (-z'')' = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda + z''' = 0$$

Para z

$$F_z^* - \frac{d}{dx}(F_{z'}^*) + \frac{d^2}{dx^2}(F_{z''}^*) = 0$$
$$2 - \lambda' - (y')'' = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 - y''' - \lambda' = 0$$

c) Se forma el sistema con las Ecuaciones de Euler y la condición de ligadura

$$\begin{cases} -\lambda + z''' = 0 & (1) \\ 2 - y''' - \lambda' = 0 & (2) \\ z' - y = 0 & (3) \end{cases}$$

Es conveniente despejar λ (recordar que es función de x) de (1), derivar y reemplazar en (2). Análogamente conviene despejar y de (3), derivar y reemplazar en (2). De esta manera resulta una EDO con una sola variable que es z

$$\begin{aligned} -\lambda + z''' = 0 & \Rightarrow \lambda = z''' \Rightarrow \lambda' = z^{IV} \\ z' - y = 0 & \Rightarrow y = z' \Rightarrow y''' = z^{IV} \end{aligned}$$

Reemplazando estas expresiones en (2) obtenemos:

$$\begin{aligned} 2 - y''' - \lambda' &= 0 \\ 2 - z^{IV} - z^{IV} &= 0 \\ z^{IV} &= 1 \end{aligned}$$

Integrando miembro a miembro cuatro veces respecto de x se obtiene

$$z = \frac{x^4}{24} + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$$

Reemplazando en la condición de ligadura

$$y = z' = \frac{x^3}{6} + 3C_1x^2 + 2C_2x + C_3$$

Usando las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} z(0) = 0 = C_4 & \Rightarrow C_4 = 0 \\ y(0) = 0 = C_3 & \Rightarrow C_3 = 0 \\ \begin{cases} y(1) = \frac{1}{6} + 3C_1 + 2C_2 = \frac{1}{24} \\ z(1) = \frac{1}{24} + C_1 + C_2 = 0 \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = -\frac{1}{24} \end{cases} \end{aligned}$$

La solución única del problema es

$$\begin{cases} z = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{24} = \frac{x^3(x-1)}{24} \\ y = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{8}x^2 = \frac{x^2}{24}(4x-3) \end{cases}$$

Ejercicio: Optimizar

$$J(y, z) = \int_0^1 (xy - y'z + z''y) dx \quad \text{sujeta a} \quad z = 2y$$

siendo

$$\begin{aligned} y(0) &= 1/24 & y(1) &= 0 \\ z(0) &= 0 & z(1) &= -1/4 \end{aligned}$$

PROBLEMAS ISOPERIMÉTRICOS

Problema 1:

Hallar la curva cerrada de longitud fija ℓ que encierra la región D de mayor área.

Planteo: Supongamos que la curva C buscada (cerrada, simple, regular y orientada positivamente) está parametrizada por

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

Consideremos el campo vectorial auxiliar $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = (0, x)$. Luego por el Teorema de Green

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy = \iint_D dx dy = \text{Area}(D)$$

Por otro lado

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} (0, x(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) dt = \int_{t_0}^{t_1} x(t) y'(t) dt$$

Por lo tanto, se busca optimizar:

$$\text{Area}(D) = \mathcal{J}(x, y) = \int_{t_0}^{t_1} xy' dt$$

sujeito a la restricción

$$\ell = \oint_C ds = \int_{t_0}^{t_1} |\vec{r}'(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

y que satisfaga las condiciones de contorno $x(t_0) = x(t_1)$, $y(t_0) = y(t_1)$.

Nota: El nombre *isoperimétrico* proviene del hecho de que la longitud de la curva es constante. A diferencia de los problemas con restricción vistos anteriormente, ahora las restricciones se determinan mediante identidades que involucran una integral.

Problema 2: (Dual al problema 1)

Hallar la curva cerrada de mínima longitud que encierra un área fija A .

Planteo: Usando la misma parametrización de la curva buscada C , resulta que se busca optimizar:

$$\ell = \mathcal{J}(x, y) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

sujeito a la restricción

$$\int_{t_0}^{t_1} xy' dt = A$$

y que satisfaga las condiciones de contorno $x(t_0) = x(t_1)$, $y(t_0) = y(t_1)$.

Generalización del problema isoperimétrico

En general, se busca hallar la extremal de

$$\mathcal{J}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx$$

Sujeto a m restricciones (conocidas como isoperimétricas) del tipo

$$\int_{x_0}^{x_1} \phi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx = \ell_i \quad \forall i = 1, \dots, m$$

y a las condiciones de contorno

$$y_1(x_0) = y_{10} \quad y_2(x_0) = y_{20} \quad \dots \quad y_n(x_0) = y_{n0}$$

$$y_1(x_1) = y_{11} \quad y_2(x_1) = y_{21} \quad \dots \quad y_n(x_1) = y_{n1}$$

Solución: El procedimiento para resolver los problemas isoperimétricos generales también es conocido como *Método de Multiplicadores de Lagrange*:

- Construir la función de Lagrange:

$$F^* = F + \sum_{i=1}^m \lambda_i \phi_i$$

- Calcular las EE para cada incógnita y_i

$$F_{y_i}^* - \frac{d}{dx}(F_{y_i'}^*) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

- Resolver el sistema de $n+m$ ecuaciones conformado por las anteriores n EDOs más las m restricciones

$$\int_{x_0}^{x_1} \phi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx = \ell_i \quad \forall i = 1, \dots, m$$

Siempre teniendo en cuenta que las λ_i deben considerarse constantes desconocidas, y no funciones de x como antes.

Demostración: Hagamos la prueba suponiendo que tenemos sólo dos funciones incógnitas ($n = 2$) y solo una restricción ($m = 1$). En el caso general se procede de manera análoga.

Problema: Nos proponemos entonces optimizar

$$J(y_1, y_2) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, y_1', y_2') dx$$

sujeto a la restricción isoperimétrica

$$\int_{x_0}^{x_1} \phi(x, y_1, y_2, y_1', y_2') dx = \ell$$

y a las condiciones de contorno

$$y_1(x_0) = y_{10} \quad y_2(x_0) = y_{20}$$

$$y_1(x_1) = y_{11} \quad y_2(x_1) = y_{21}$$

Podemos reducir este problema a un problema con una restricción dada por una E.D. como antes definiendo la función auxiliar

$$z = z(x) = \int_{x_0}^x \phi(t, y_1, y_2, y_1', y_2') dt$$

la cual verifica que

$$z' = \phi(x, y_1, y_2, y_1', y_2') \quad z(x_0) = 0 \quad z(x_1) = \ell$$

Incorporando a z como nueva incógnita al problema de optimización, se obtiene el siguiente planteo equivalente del problema isoperimétrico en análisis:

Problema Equivalente: Optimizar el funcional

$$\mathcal{J}(y_1, y_2, z) = \mathcal{J}(y_1, y_2) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, y_1', y_2') dx$$

sujeto a la restricción

$$z' = \phi(x, y_1, y_2, y_1', y_2')$$

y a las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} y_1(x_0) &= y_{10} & y_2(x_0) &= y_{20} \\ y_1(x_1) &= y_{11} & y_2(x_1) &= y_{21} \\ z(x_0) &= 0 & z(x_1) &= \ell \end{aligned}$$

Este nuevo planteo es un problema de extremos condicionados en el que la restricción es una ED. Por este motivo, se resuelve con el procedimiento visto anteriormente, esto es, se plantea el Funcional de Lagrange

$$F^{**} = F + \lambda(\phi - z')$$

y se hallan las EE correspondientes.

Ecuaciones de Euler para las z_i :

$$F_{z'}^{**} = \text{cte} \implies \lambda = -\text{cte}$$

Resulta que los multiplicadores de Lagrange usados para resolver problemas isoperimétricos deben considerarse constantes, y no funciones de x como antes.

Por otro lado, las EE para las incógnitas y_i son iguales a las que se obtendrían si el Funcional de Lagrange fuese

$$F^* = F + \lambda\phi$$

ya que z' no interfiere en el resultado obtenido al derivar por y_i o y_i' .

Se concluye que para resolver el problema isoperimétrico planteado se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} F_{y_1}^* - \frac{d}{dx}(F_{y_1'}^*) = 0 \\ F_{y_2}^* - \frac{d}{dx}(F_{y_2'}^*) = 0 \\ \int_{x_0}^{x_1} \phi(x, y_1, y_2, y_1', y_2') dx = \ell \end{cases}$$

Nota: La función auxiliar z no aparece en el sistema final obtenido. Sólo se usa para justificar por qué λ debe considerarse constante, y para deducir la forma final del funcional de Lagrange. Sin embargo, todas las versiones del problema de optimización son equivalentes, siendo la propuesta final la más sencilla para abordar los problemas isoperimétricos.

Observación: En los problemas isoperimétricos no es necesario imponer $m < n$. Las restricciones son integrales y, por tanto, representan condiciones globales sobre las funciones, no relaciones que deban cumplirse independientemente en cada punto. Al introducir una función auxiliar z_i por cada restricción integral, el problema equivalente incorpora simultáneamente una nueva función y una nueva restricción diferencial. Por este motivo no se reduce el número neto de funciones libres del problema equivalente. La restricción integral original queda codificada en las condiciones de contorno de z_i .

Ejemplo: Optimizar

$$\mathcal{J}(y) = \int_0^1 (y'^2 - 2y) dx \quad \text{sujeta a} \quad \int_0^1 y dx = 1$$

Solución: Notar que $m = n = 1$. En este caso el funcional de Lagrange es

$$F^*(x, y, \lambda) = F(x, y, y') + \lambda \phi(x, y, y') = y'^2 - 2y + \lambda y$$

siendo λ una constante desconocida.

Halleemos la EE correspondiente a y :

$$\begin{aligned} F_y^* &= -2 + \lambda & F_{y'}^* &= 2y' & \frac{d}{dx} F_{y'}^* &= 2y'' \\ -2 + \lambda - 2y'' &= 0 & & & & \text{(EE para } y) \end{aligned}$$

Despejando e integrando:

$$y'' = -1 + \frac{\lambda}{2} \Rightarrow y' = \left(-1 + \frac{\lambda}{2}\right)x + C_1 \Rightarrow y = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{4}\right)x^2 + C_1x + C_2$$

Tenemos que hallar 3 constantes, por lo que necesitamos 3 ecuaciones.

Usemos la restricción isoperimétrica para hallar la primera ecuación

$$1 = \int_0^1 y dx = \int_0^1 \left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{4}\right)x^2 + C_1x + C_2 \right) dx$$

$$1 = \left(\left(-\frac{1}{6} + \frac{\lambda}{12} \right) x^3 + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x \right) \Big|_0^1$$

$$\boxed{1 = -\frac{1}{6} + \frac{\lambda}{12} + \frac{C_1}{2} + C_2} \quad (1)$$

Ahora usemos las condiciones de contorno:

$$y(0) = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0} \quad (2)$$

$$y(1) = 0 \Rightarrow \boxed{-\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{4} + C_1 + C_2 = 0} \quad (3)$$

Tenemos entonces tres ecuaciones y tres incógnitas.

Reemplazando (2) en (1) resulta

$$\frac{7}{6} = \frac{\lambda}{12} + \frac{C_1}{2} \Rightarrow 14 = \lambda + 6C_1 \quad (4)$$

Reemplazando (2) en (3) resulta

$$\frac{\lambda}{4} + C_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4} \quad (5)$$

Reemplazando (5) en (4) resulta

$$14 = \lambda + 6 \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4} \right) \Rightarrow 14 = \lambda + 3 - \frac{3}{2}\lambda \Rightarrow 11 = -\frac{1}{2}\lambda \Rightarrow \lambda = -22$$

Reemplazando en (5), resulta $C_1 = 6$. Luego la solución es

$$y = -6x^2 + 6x$$

Ejemplo: Problema del cable suspendido:

Encontrar la forma que adopta un cable sometido a la **acción de la gravedad** (única fuerza que actúa sobre el cable), amarrado en sus extremos. Se supone que el cable es flexible, uniforme con densidad ($\mu = \frac{dm}{ds}$) constante. Además, es inextensible.

La pregunta es: ¿cuál será la forma que adopta el cable?

Las condiciones son:

- Se considera que actúa sobre el cable solamente la fuerza de la gravedad
- El cable es flexible
- Uniforme con densidad constante
- Inextensible

- Amarrado en sus extremos

Solución

La forma que adopta el cable es la que hace que se acumule la mínima energía potencial a lo largo del cable. Equivalentemente, la forma que adopta el cable es la que hace que el centro de gravedad esté lo más abajo posible, o sea, lo más cercano a la tierra posible.

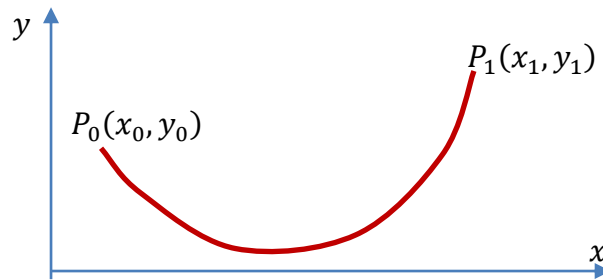


Figura 4

Supongamos que el cable toma la forma dada por la curva C correspondiente a la gráfica de la función $y = y(x)$. Según lo visto en Cálculo II, tenemos que

$$y_G = \frac{\int_C y \, dm}{\int_C dm} = \frac{\mu \int_C y \, ds}{\mu \underbrace{\int_C ds}_{\ell \text{ cte}}} = \frac{1}{\ell} \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} \, dx$$

Ahora nuestro objetivo es minimizar y_G respetando la restricción:

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} \, dx = \ell$$

Esta restricción es consecuencia de la longitud fija del cable, y sin lugar a duda modifica el valor óptimo de y_G .

Como la constante $\frac{1}{\ell}$ no influye en el mínimo, resulta que la curva que hace mínima la energía potencial de un cable suspendido amarrado en sus extremos (conocida como catenaria) es la curva $y = y(x)$ que hace mínima la integral

$$\mathcal{J}(y) = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} \, dx$$

sujeta a la restricción

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} \, dx = \ell$$

El funcional de Lagrange correspondiente es

$$F^*(y, y', \lambda) = y\sqrt{1 + y'^2} + \lambda\sqrt{1 + y'^2} = (y + \lambda)\sqrt{1 + y'^2}$$

Derivando:

$$F_{y'}^* = (y + \lambda) \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

Luego reemplazando en la E.E. para funcionales que no dependen explícitamente de x , resulta

$$\begin{aligned} F^* - y'F_{y'}^* &= C \Rightarrow (y + \lambda)\sqrt{1 + y'^2} - y' \frac{(y + \lambda)y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{(y + \lambda)(1 + y'^2) - (y + \lambda)y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = C \Rightarrow \frac{y + \lambda}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1 \end{aligned}$$

Luego la EDO a resolver es

$$\frac{y + \lambda}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1 \quad (*)$$

Si $y' = \sinh(t)$ entonces

$$\frac{y + \lambda}{\cosh(t)} = C_1 \Rightarrow \boxed{y = C_1 \cosh(t) - \lambda} \Rightarrow dy = C_1 \sinh(t) dt$$

Ya tenemos la expresión de $y = y(t)$, ahora debemos encontrar $x = x(t)$ para terminar de hallar la parametrización de la curva C óptima.

Teniendo en cuenta que $y' = \frac{dy}{dx}$, se obtiene

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C_1 \sinh(t) dt}{\sinh(t)} = C_1 dt \Rightarrow \boxed{x = C_1 t + C_2}$$

En resumen: La solución óptima que da la forma adoptada por el cable expresada en forma paramétrica es

$$\begin{cases} x = C_1 t + C_2 \\ y = C_1 \cosh(t) - \lambda \end{cases}$$

Es posible hallar la solución de forma explícita aplicando sustitución con el fin de eliminar a t de la expresión.

$$y = C_1 \cosh\left(\frac{x - C_2}{C_1}\right) - \lambda$$

Esta solución se conoce como **catenaria** (de cadena).

Las constantes C_1 , C_2 y λ se determinan usando las condiciones de contorno y la restricción del problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 = C_1 \cosh\left(\frac{x_0 - C_2}{C_1}\right) - \lambda \\ y_1 = C_1 \cosh\left(\frac{x_1 - C_2}{C_1}\right) - \lambda \\ \ell = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx = C_1 \left[\sinh\left(\frac{x_2 - C_2}{C_1}\right) - \sinh\left(\frac{x_1 - C_2}{C_1}\right) \right] \end{array} \right.$$

Una vez halladas las constantes (generalmente usando métodos numéricos), la solución al problema viene dada por la catenaria:

$$y = C_1 \cosh\left(\frac{x - C_2}{C_1}\right) - \lambda$$

donde el mínimo de la catenaria (vértice) se encuentra en el punto $(C_2, C_1 - \lambda)$. ¿Por qué?

Resolveremos ahora los problemas planteados al comienzo:

Solución del Problema 1

Se busca optimizar:

$$\text{Area}(D) = J(x, y) = \int_{t_0}^{t_1} xy' dt$$

Sujeto a la restricción

$$\ell = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

y que satisfaga las condiciones de contorno $x(t_0) = x(t_1)$, $y(t_0) = y(t_1)$.

Para ello se considera el funcional de Lagrange dado por

$$F^*(x, y, x', y', \lambda) = xy' + \lambda \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

Obtengamos la EE para x :

$$F_x^* = y' \quad F_{x'}^* = \frac{\lambda x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

Luego la EE buscada es

$$y' - \frac{d}{dt} \left(\frac{\lambda x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(y - \frac{\lambda x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad y - \frac{\lambda x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = C_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y - C_1 = \frac{\lambda x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}} \quad (EE1)$$

Ahora obtengamos la EE para y:

$$F_y^* = 0 \quad F_{y'}^* = x + \frac{\lambda y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

Luego la EE buscada es

$$\frac{d}{dt} \left(x + \frac{\lambda y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x + \frac{\lambda y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = C_2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x - C_2 = \frac{-\lambda y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}} \quad (EE2)$$

Elevando al cuadrado ambas EE y sumándolas, se obtiene

$$(x - C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \left(\frac{\lambda x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right)^2 + \left(\frac{-\lambda y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right)^2$$

$$(x - C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \lambda^2$$

Se obtiene una familia de circunferencias con centro en (C_2, C_1) y radio λ .

Usando la tercera ecuación del sistema dada por la restricción, resulta

$$\ell = \oint_C ds = 2\pi\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\ell}{2\pi}$$

Por lo tanto

$$(x - C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \lambda^2$$

Esta es la solución general al problema, la cual consiste en una familia de circunferencias con centro en (C_2, C_1) y radio $\frac{\ell}{2\pi}$.

Las constantes C_1 y C_2 se hallan mediante condiciones de contorno adicionales.

Problema 2

Hallar la curva cerrada de mínima longitud ℓ que encierra un área fija A .

Solución:

Se busca optimizar:

$$\ell = \mathcal{J}(x, y) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

Sujeto a la restricción

$$\int_{t_0}^{t_1} xy' dt = A$$

y que satisfaga las condiciones de contorno $x(t_0) = x(t_1)$, $y(t_0) = y(t_1)$.

Para ello se considera el funcional de Lagrange dado por

$$F^*(x, y, x', y', \lambda) = \sqrt{x'^2 + y'^2} + \lambda xy'$$

Obtengamos la EE para x :

$$F_x^* = \lambda y' \qquad F_{x'}^* = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

Luego la EE buscada es

$$\begin{aligned} \lambda y' - \frac{d}{dt} \left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\lambda y - \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right) = 0 \\ \Rightarrow \quad \lambda y - \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} &= C_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda y - C_1 = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}} \quad (EE1) \end{aligned}$$

Ahora obtengamos la EE para y :

$$F_y^* = 0 \qquad F_{y'}^* = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} + \lambda x$$

Luego la EE buscada es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} + \lambda x \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda x + \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = C_2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda x - C_2 = \frac{-y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}} \quad (EE2)$$

Elevando al cuadrado ambas EE y sumándolas, se obtiene

$$(\lambda x - C_2)^2 + (\lambda y - C_1)^2 = \left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right)^2 + \left(\frac{-y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right)^2$$

$$\left(x - \frac{C_2}{\lambda} \right)^2 + \left(y - \frac{C_1}{\lambda} \right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Se obtiene una familia de circunferencias con centro en $(C_2/\lambda, C_1/\lambda)$ y radio $1/\lambda$.

Usando la tercera ecuación del sistema dada por la restricción, resulta

$$A = \frac{\pi}{\lambda^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \sqrt{\frac{\pi}{A}}$$

Por lo tanto

$$\left(x - C_2 \sqrt{\frac{A}{\pi}} \right)^2 + \left(y - C_1 \sqrt{\frac{A}{\pi}} \right)^2 = \frac{A}{\pi}$$

$$(x - C_3)^2 + (y - C_4)^2 = \frac{A}{\pi}$$

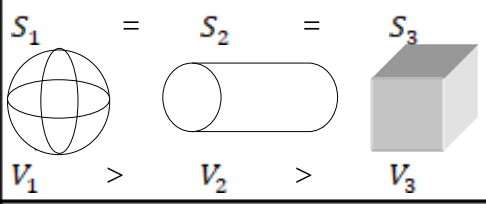
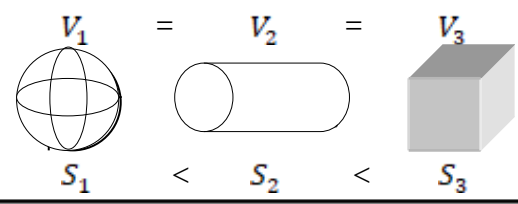
Esta es la solución general al problema, la cual consiste en una familia de circunferencias con centro en (C_3, C_4) y radio $\sqrt{\frac{A}{\pi}}$.

Las constantes C_3 y C_4 se hallan usando condiciones de contorno extras.

Conclusión:

- Para un perímetro dado, la circunferencia es la curva cerrada que encierra mayor área.
- Para un área dada, la circunferencia es la curva cerrada que tiene menor perímetro.

Esto se puede generalizar a cuerpos redondos. Un cubo es menos redondo que un cilindro, y este menos que una esfera

$S_1 = S_2 = S_3$  $V_1 > V_2 > V_3$	$V_1 = V_2 = V_3$  $S_1 < S_2 < S_3$
Para una misma superficie, la esfera es la de mayor volumen	Para un mismo volumen, la esfera es la de menor superficie externa