

Universidad Nacional de San Juan

Facultad de Ingeniería

MATEMÁTICA APLICADA

Ingeniería Mecánica

Ingeniería Electromecánica

Ecuaciones Diferenciales en
Derivadas Parciales: Semana 2

Equipo de Cátedra

Profesor Titular

Dr. Javier Gimenez

Profesor Adjunto

Dr. Emanuel Tello

Jefe de Trabajos Prácticos

Ing. Cristian Bustos

AÑO 2026

ECUACIONES DEL TIPO PARABÓLICAS

Aparecen en los fenómenos de conducción de calor y de difusión, su forma más simple es.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Deducción:

Planteamos la ecuación de balance del calor para un cuerpo o volumen de trabajo V : Del calor generado Q_g parte se absorbe (Q_a) y parte se transmite o se propaga (Q_c). Esto es

$$Q_g = Q_a + Q_c \quad (1)$$

Analicemos cada uno de estos conceptos por separado.

Propagación del calor en el espacio:

Sea $u = u(x, y, z, t)$ la temperatura en el punto $P(x, y, z)$ en un instante t . Si u no es constante, entonces surgen flujos térmicos dirigidos desde los lugares de mayor temperatura u hacia los lugares de menor temperatura u . De acuerdo a la Ley de Fourier, este flujo térmico se representa con el campo vectorial

$$\vec{Q} = -k \cdot \overrightarrow{\text{grad } u}$$

cuya dirección es la de máxima propagación, o sea perpendicular a las isoterma (superficies de nivel) $u = u_i$. Además, k se conoce como constante de conductividad térmica.

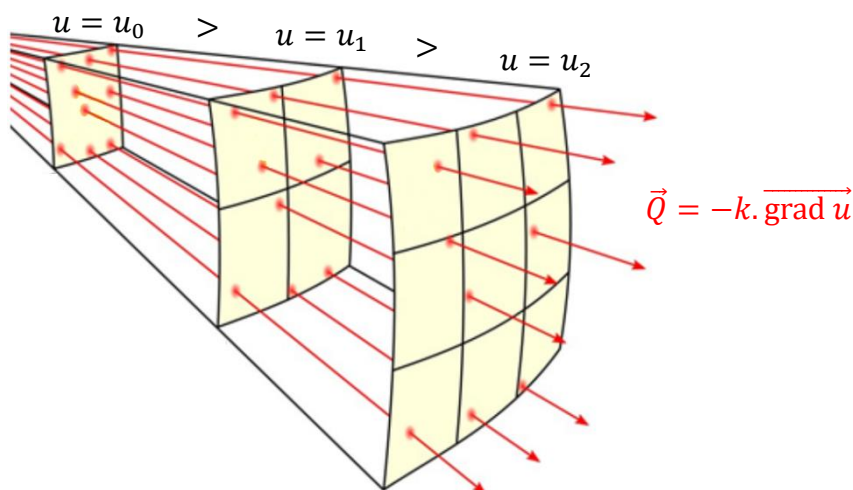


Figura 1

Si consideramos la superficie cerrada S que encierra al volumen de trabajo V , entonces la cantidad de calor Q_c que sale de V (o se propaga desde V) se obtiene aplicando el teorema de la divergencia (o de Gauss),

$$\begin{aligned}
 Q_c &= \oint_S \vec{Q} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{Q} dV \\
 &= - \iiint_V \text{div}(k \cdot \overrightarrow{\text{grad } u}) dV \\
 &= - \iiint_V k \cdot \underbrace{\text{div}(\overrightarrow{\text{grad } u})}_{\Delta u} dV \\
 &= - \iiint_V k \Delta u dV \quad (2)
 \end{aligned}$$

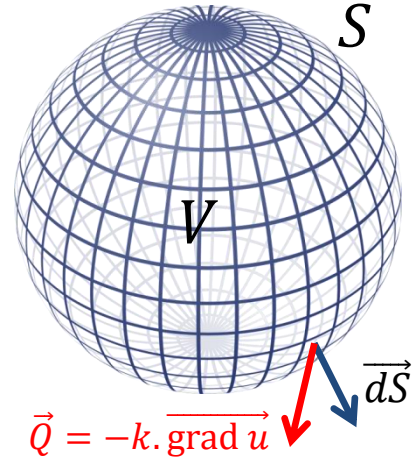


Figura 2

donde Δu es el Laplaciano de u dado por

$$\Delta u = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad } u}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Calor Absorbido: El calor total absorbido por unidad de tiempo viene dado por

$$Q_a = \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV \quad (3)$$

donde $\frac{\partial u}{\partial t}$ representa la variación de temperatura en cada punto de un cuerpo o volumen de trabajo V ; c es el calor específico del cuerpo; y ρ es la densidad del cuerpo

Calor generado: El calor generado por unidad de tiempo dentro del volumen de trabajo V es:

$$Q_g = \iiint_V F dV \quad (4)$$

donde F representa la densidad volumétrica de calor generado por unidad de tiempo.

Ecuación de la conducción del calor:

Reemplazando (2), (3) y (4), en (1), resulta que

$$\iiint_V F dV = \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV - \iiint_V k \cdot \Delta u dV$$

Luego:

$$\iiint_V \left(F - c\rho \frac{\partial u}{\partial t} + k\Delta u \right) dV = 0$$

De la arbitrariedad del volumen tomado surge que el integrando es cero, esto es:

$$F - c\rho \frac{\partial u}{\partial t} + k\Delta u = 0 \quad (5)$$

Casos Particulares:

Si no existen fuentes de calor, entonces $F = 0$, y por ende (5) toma la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u \quad (6)$$

donde $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ es una constante denominada difusividad térmica.

En el caso unidimensional $u = u(x, t)$, $0 \leq x \leq \ell$, $t \geq 0$, representa la evolución temporal de la temperatura a lo largo de una barra de longitud ℓ . En este caso, el Laplaciano queda reducido a una sola variable, o sea

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

y la ecuación (6) toma la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7)$$

Ecuación de Difusión:

En forma totalmente análoga a las temperaturas, las distintas concentraciones de un gas en un medio (o de una sustancia diluida en una solución) originan difusión desde los lugares de mayor concentración a los de menor. El problema se modela con (6) siendo u la concentración y a^2 es el coeficiente de difusión. La ecuación final es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$$

Condiciones Complementarias:

Caso de la barra de longitud ℓ :

Condición Inicial: Se da solo una que es la temperatura inicial, (debido a que en la EDDP aparece solamente la derivada primera respecto del tiempo t) es decir:

$$u(x, 0) = f(x)$$

Condiciones de Contorno: Se presenta en alguna de las siguientes formas, siempre considerando para todo tiempo t :

1. Se da la temperatura en los extremos de la barra:

$$u(0, t) \quad \text{y} \quad u(\ell, t)$$

2. Se da el valor de la derivada en los extremos:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t)$$

Estas condiciones aparecen cuando se da el flujo térmico en el extremo. Por ejemplo para $x = \ell$ (Figura 3)

$$\vec{Q} \cdot \vec{n} = -k \cdot \overrightarrow{\text{grad } u} \cdot \vec{e}_1 = -k \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t)$$



Figura 3

3. Se da una relación entre el valor de la derivada y la función. Por ejemplo: para $x = \ell$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = -\lambda(u(\ell, t) - U_0), \quad \lambda = \frac{h}{k}$$

Esta forma nos dice que el flujo en el extremo $x = \ell$, $\left(-k \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t)\right)$ se realiza según la ley de Newton $Q = h(u - U_0)$ donde U_0 es la temperatura del medio exterior y λ es el coeficiente de intercambio térmico.

METODO DE SEPARACION DE VARIABLES

Apliquemos ahora el mismo procedimiento que utilizamos para resolver el problema de onda. Hallar la solución de:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ \text{para todo } t \quad (2) \\ \text{para todo } x \quad (3) \end{matrix}$$

Solución:

Paso a) Si $u(x, t) = X(x)T(t)$ tenemos

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T \\ \frac{\partial u}{\partial t} = XT' \end{cases}$$

Reemplazando en (1) resulta:

$$XT' = a^2 X''T$$

Paso b) Separando variables

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = \text{cte} \quad (4)$$

Paso c) Aplicando las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \quad \forall t &\Rightarrow X(0) = 0 \\ u(l, t) = X(\ell)T(t) = 0 \quad \forall t &\Rightarrow X(\ell) = 0 \end{aligned}$$

obtenemos el problema de Sturm–Liouville. En efecto:

$$\begin{cases} X'' - \text{cte} \cdot X = 0 \\ X(0) = X(\ell) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Paso d) Análogamente a lo realizado en el paso d) de la solución de la ecuación de ondas, para obtener una solución distinta de la trivial, se debe considerar $\text{cte} = -\lambda^2$, resultando que el problema (5) sólo tiene solución para $\lambda_n = \frac{n\pi}{\ell}$ con n un entero positivo. Luego hay una solución de (5) para cada n , y viene dada por:

$$X_n(x) = C_{2,n} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \quad (6)$$

Paso e) Para cada λ_n (o para cada n) resolvamos la EDO de primer orden en la variable t

$$T'_n + a^2 \lambda_n^2 T_n = 0 \quad (7)$$

EDO homogénea de primer orden cuya ecuación característica es:

$$r + a^2 \lambda_n^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = -a^2 \lambda_n^2$$

Luego recordando que $\lambda_n = \frac{n\pi}{\ell}$ la solución es :

$$T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 t}$$

Paso f) Conformar las funciones

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = C_n e^{-\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$$

donde $C_n = C_{2,n}A_n$, y con ellas la función solución será

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \\ u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \end{aligned} \quad (8)$$

La función (8) satisface la ecuación (1) y las condiciones de contorno (2). Calculemos ahora las C_n de modo que u también satisfaga la condición inicial (3).

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$$

Si observamos esta expresión, no es otra cosa que el desarrollo en serie de Fourier de $f(x)$, en el cual solo aparecen los términos de los senos. Esto significa que corresponde al desarrollo de Fourier de una extensión impar de la función $f(x)$. El valor de la frecuencia angular es $\omega_0 = \pi/\ell$, por lo tanto, el período es $T = 2\ell$. El coeficiente C_n corresponde al coeficiente b_n del desarrollo en serie de Fourier, luego por ser impar se calcula como

$$C_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) dx \quad (9)$$

En resumen:

La ecuación diferencial correspondiente a la distribución de temperatura de una barra de longitud ℓ está dada por

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

Y su solución es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$$

Donde:

$$C_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) dx$$

Ejemplo1 : Resolver:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = u(3, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) = 5 \end{cases}$$

Usando (8) resulta:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{2n^2\pi^2}{9}t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3} x\right) \quad (10)$$

donde C_n se halla usando (9) del siguiente modo

$$C_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) dx$$

$$C_n = \frac{2}{3} \int_0^3 5 \sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right) dx = -\frac{10}{3} \frac{3}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{3}x\right) \Big|_0^3$$

$$C_n = -\frac{10}{n\pi} (\cos(n\pi) - 1) = -\frac{10}{n\pi} ((-1)^n - 1)$$

$$C_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{20}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Reemplazando en (10), resulta

$$u(x, t) = \sum_{n \text{ impar}} \frac{20}{n\pi} e^{-\frac{2n^2\pi^2}{9}t} \sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right)$$

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{20}{(2k-1)\pi} e^{-\frac{2(2k-1)^2\pi^2}{9}t} \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{3}x\right)$$

Caso no homogéneo:

Supongamos ahora que se nos presenta el mismo problema pero con condiciones de contorno no homogéneas, esto es, modificando las condiciones (2)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = \alpha \quad \forall t \\ u(\ell, t) = \beta \quad \forall t \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad (11)$$

Si queremos resolver este problema utilizando el mismo procedimiento aplicado al caso homogéneo, en el paso c) no obtendríamos condiciones de contorno nulas para (5) y, por ende, no podríamos continuar con la resolución. La idea es hallar un problema asociado con condiciones de contorno homogéneas, resolverlo y usar esa solución para resolver el caso no homogéneo.

Se propone como solución una traslación

$$u(x, t) = Ax + B + w(x, t) \quad (12)$$

donde $w(x, t)$ satisface la misma EDDP con condiciones homogéneas, es decir es solución de

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

pero con condiciones de contorno homogéneas, esto es

$$\begin{aligned} w(0, t) &= 0 \\ w(\ell, t) &= 0 \end{aligned}$$

Si aplicamos a la solución propuesta (12) las condiciones de contorno del problema original resulta:

$$u(0, t) = \alpha = A \cdot 0 + B + \underbrace{w(0, t)}_0$$

$$\boxed{B = \alpha}$$

$$u(\ell, t) = \beta = A\ell + B + \underbrace{w(\ell, t)}_0$$

$$\beta = \ell A + \alpha$$

$$\boxed{A = \frac{\beta - \alpha}{\ell}}$$

Luego (12) resulta ser

$$u(x, t) = \frac{\beta - \alpha}{\ell} x + \alpha + w(x, t) \quad (13)$$

Si observamos esta expresión, resta calcular $w(x, t)$. Para ello se necesita conocer la condición inicial asociada al problema homogéneo

Veamos cuál debería ser la condición inicial del problema homogéneo asociado. Teniendo en cuenta la solución propuesta y la condición inicial del problema planteado resulta

$$f(x) = u(x, 0) = \frac{\beta - \alpha}{\ell} x + \alpha + w(x, 0)$$

Luego

$$w(x, 0) = f(x) - \frac{\beta - \alpha}{\ell} x - \alpha \quad (14)$$

En resumen: Para resolver el problema no homogéneo, se debe hallar $w(x, t)$ que es solución del problema homogéneo asociado cuya condición inicial se obtiene de reemplazar la condición inicial dada, en la solución trasladada del problema no homogéneo

Ejemplo 2: Resolver

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = 10, \\ u(3, t) = 40 \\ u(x, 0) = 10x + 15 \end{cases}$$

Solución:

Se plantea la solución

$$u(x, t) = Ax + B + w(x, t)$$

Donde

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ w(0, t) = w(3, t) = 0 \\ w(x, 0) = ? \end{cases}$$

- Cálculo de las constantes A y B

Reemplazando las condiciones de contorno para $u(x, t)$ se tiene

$$u(0, t) = 10$$

$$u(0, t) = A \cdot 0 + B + \underbrace{w(0, t)}_0$$

$$\boxed{B = 10}$$

$$u(3, t) = 40$$

$$u(3, t) = A \cdot 3 + B + \underbrace{w(3, t)}_0$$

$$40 = 3A + 10 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 10}$$

Luego

$$u(x, t) = 10x + 10 + w(x, t)$$

- Cálculo de la condición inicial para $w(x, t)$

Considerando la condición inicial dada

$$u(x, 0) = 10x + 15$$

$$u(x, 0) = 10x + 10 + w(x, 0)$$

$$w(x, 0) = 5$$

Por lo tanto, el problema homogéneo asociado es

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ w(0, t) = w(3, t) = 0 \\ w(x, 0) = 5 \end{cases}$$

Este problema por casualidad resultó ser el mismo que se resolvió en el Ejemplo anterior, y cuya solución es

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{20}{(2k-1)\pi} e^{-\frac{2(2k-1)^2\pi^2}{9}t} \operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi}{3}x\right)$$

Si no fuese por esta casualidad deberíamos haberlo resuelto usando separación de variables, para luego decir que la solución del problema no homogéneo viene dada por

$$u(x, t) = 10x + 10 + w(x, t)$$

$$u(x, t) = 10x + 10 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{20}{(2k-1)\pi} e^{-\frac{2(2k-1)^2\pi^2}{9}t} \operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi}{3}x\right)$$