

Universidad Nacional de San Juan

Facultad de Ingeniería

MATEMÁTICA APLICADA

Ingeniería Mecánica

Ingeniería Electromecánica

Ecuaciones Diferenciales en
Derivadas Parciales: Semana 3

Equipo de Cátedra

Profesor Titular

Dr. Javier Gimenez

Profesor Adjunto

Dr. Emanuel Tello

Jefe de Trabajos Prácticos

Ing. Cristian Bustos

AÑO 2026

ECUACIONES DEL TIPO ELÍPTICAS:

Vimos que la temperatura satisface la ecuación:

$$F = c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u$$

Si el proceso es estacionario, entonces u no es función del tiempo, es decir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Resultando lo que se conoce con el nombre de Ecuación de Poisson

$$\Delta u + f = 0, \quad f = \frac{F}{k}$$

y si no existen fuentes $F = 0$, surge la llamada Ecuación de Laplace

$$\begin{aligned} \Delta u &= \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad} u}) \\ \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Toda función u que satisface (1) y es continua hasta la derivada segunda se llama función armónica.

Al no ser u función del tiempo, sólo existen condiciones de contorno, las cuales vienen dadas de alguna de las siguientes formas:

1. Problema de Dirichlet:

$$u(x, y, z) = f_1(x, y, z)$$

para todo (x, y, z) en el borde o frontera del dominio de trabajo.

2. Problema de Neumann:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, y, z) = f_2(x, y, z)$$

para todo (x, y, z) en el borde o frontera del dominio de trabajo, siendo $\vec{n}$ el vector normal a la frontera.

3. Problema de Robin:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, y, z) \pm h(u - f_3(x, y, z)) = 0$$

para todo (x, y, z) en el borde o frontera del dominio de trabajo, siendo $\vec{n}$ el vector normal a la frontera.

Las funciones f_1, f_2, f_3 deben ser continuas por partes.

NOTA: Se denominan problemas mixtos a aquellos donde se imponen tipos diferentes de condiciones en distintas partes de la frontera.

Otros ejemplos donde aparece la ecuación de Laplace

A) Potencial de un campo electrostático

Sabemos que el campo eléctrico puede expresarse en términos del potencial eléctrico ϕ como

$$\vec{E} = -\nabla\phi$$

Por otra parte, la ley de Gauss establece que

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon} \iiint_V \rho_e dV$$

donde ρ_e es la densidad volumétrica de carga eléctrica y ε es la permitividad eléctrica del medio. Aplicando el teorema de la divergencia,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon}$$

Como $\vec{E} = -\nabla\phi$ resulta

$$-\nabla \cdot (\nabla\phi) = \frac{\rho_e}{\varepsilon}$$

y, por lo tanto, obtenemos la ecuación de Poisson

$$\Delta\phi = -\frac{\rho_e}{\varepsilon}$$

Si en la región no existen cargas eléctricas, es decir, $\rho_e = 0$, resulta

$$\Delta\phi = 0$$

Por lo tanto, en una región libre de cargas el potencial eléctrico ϕ es una función armónica.

B) Potencial eléctrico en una corriente estacionaria

En una corriente estacionaria, la conservación de la carga implica

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

donde J es la densidad de corriente eléctrica. Por la ley de Ohm,

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

donde σ es la conductividad eléctrica del medio. Además,

$$\vec{E} = -\nabla\phi$$

Por lo tanto,

$$\vec{J} = -\sigma\nabla\phi$$

y la condición de conservación de la carga conduce a

$$\nabla \cdot (\sigma\nabla\phi) = 0$$

Si el medio es homogéneo, de modo que σ es constante, resulta

$$\sigma\Delta\phi = 0$$

y, por ende,

$$\Delta\phi = 0$$

En consecuencia, el potencial eléctrico ϕ satisface la ecuación de Laplace.

C) Flujo potencial de un fluido

Si el flujo es irrotacional, el campo de velocidades puede expresarse mediante un potencial de velocidades ϕ :

$$\vec{V} = \nabla\phi$$

Si además el fluido es incompresible, la conservación de la masa implica

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

Reemplazando la expresión del campo de velocidades,

$$\nabla \cdot (\nabla\phi) = 0$$

Por lo tanto,

$$\Delta\phi = 0$$

Así, el potencial de velocidades ϕ satisface la ecuación de Laplace.

Principio del Valor Máximo:

Bajo condiciones de regularidad, toda función armónica $u(x,y)$ toma su máximo y mínimo valor sobre la frontera de su dominio de definición.

METODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

Problema 1:

Resolver el siguiente problema de la distribución de temperatura en una lámina 2D rectangular, $\overline{oacb}$, suponiendo que en el lado $\overline{ob}$ la temperatura es U_0 y en los tres lados restantes la temperatura vale cero (Figura 1)

Solución

El problema planteado matemáticamente es:

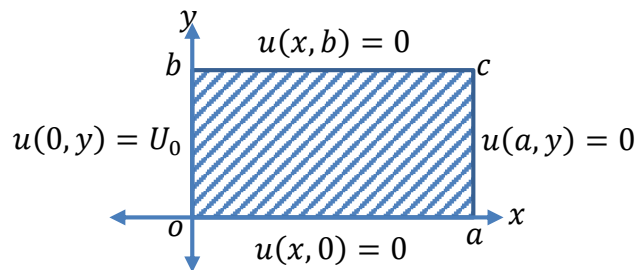


Figura 1

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(0, y) = U_0 \\ u(a, y) = 0 \\ u(x, b) = 0 \\ u(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Lo resolvemos por el método de separación de variables. Por lo tanto se supone que la solución puede expresarse como un producto de dos funciones

Resolvemos la ecuación de Laplace con las condiciones de contorno:

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad (1)$$

Paso a) Si $u(x, y) = X(x)Y(y)$ tenemos

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''Y \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = XY'' \end{cases}$$

Reemplazando en (1) resulta:

$$XY'' + X''Y = 0$$

Paso b) Separando variables

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \text{cte} \quad (2)$$

Paso c) Considerando las condiciones de contorno

$$\begin{cases} 0 = u(x, 0) = X(x)Y(0) & \Rightarrow Y(0) = 0 \\ 0 = u(x, b) = X(x)Y(b) & \Rightarrow Y(b) = 0 \\ 0 = u(a, y) = X(a)Y(y) & \Rightarrow X(a) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Si observamos las condiciones de contorno (3) vemos que la función $Y(y)$ se anula dos veces, luego de (2), obtenemos el problema de Sturm–Liouville

$$\begin{cases} Y'' - \text{cte} \cdot Y = 0 \\ Y(0) = Y(b) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Nota:

Si los lados verticales son los que presentan condiciones de contorno nulas, entonces en (4) queda un problema de Sturm–Liouville con incógnita X en lugar de Y .

Paso d) Por un razonamiento análogo al realizado en los pasos d) de las soluciones correspondientes a los modelos anteriores, se debe considerar que $\text{cte} = -\lambda^2$, para obtener una solución distinta de la trivial

$$\begin{aligned} Y'' + \lambda^2 Y &= 0 \\ Y(0) = Y(b) &= 0 \end{aligned}$$

Luego:

$$Y(y) = C_1 \cos(\lambda y) + C_2 \text{sen}(\lambda y)$$

Aplicando las condiciones de contorno dadas en (4):

$$\begin{aligned} Y(0) = C_1 &= 0 \\ Y(b) = C_2 \text{sen}(\lambda b) &= 0 \end{aligned}$$

Resultando que para que sea una solución distinta de la trivial del problema (4) sólo tiene solución para $\lambda_n = \frac{n\pi}{b}$ con n un entero positivo. Luego hay una solución de (4) para cada n , y viene dada por:

$$Y_n(y) = C_{2,n} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (5)$$

Paso e) Obtener la solución $X(x)$

De (2) reemplazando la constante por λ_n y despejando X'' para cada n se obtiene

$$X_n'' - \lambda_n^2 X_n = 0 \quad (6)$$

E.D. Ordinaria Homogénea de Segundo orden, cuya ecuación característica tiene raíces reales y distintas, por lo tanto su solución es

$$X_n(x) = A_n e^{\lambda_n x} + B_n e^{-\lambda_n x} \quad (7)$$

Incluyendo ahora la condición de contorno nula restante (4), resulta

$$0 = u(a, y) = X(a)Y(y) \Rightarrow X(a) = 0$$

Esto implica que cada X_n debe verificar que

$$X_n(a) = 0 \quad (8)$$

Reemplazando (8) en (7)

$$0 = X_n(a) = A_n e^{\lambda_n a} + B_n e^{-\lambda_n a} \Rightarrow B_n = -A_n e^{2\lambda_n a} \quad (9)$$

Reemplazando (9) en (7)

$$X_n(x) = A_n e^{\lambda_n x} - A_n e^{2\lambda_n a} e^{-\lambda_n x}$$

Sacando factor común la constante $A_n e^{\lambda_n a}$ y multiplicando y dividiendo por dos resulta:

$$X_n(x) = 2A_n e^{\lambda_n a} \frac{e^{\lambda_n(x-a)} - e^{-\lambda_n(x-a)}}{\underbrace{2}_{\sinh(\lambda_n(x-a))}}$$

$$X_n(x) = C_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}(x-a)\right) \quad (10)$$

donde $C_n = 2A_n e^{\lambda_n a}$.

Paso f) De (5) y (10) se conforman las funciones

$$u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y) = C_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}(x-a)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

donde las constantes C_n absorben y unifican las constantes de (5) y (10). Luego

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y)$$

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}(x-a)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (11)$$

La solución hallada (11) satisface la ecuación diferencial de Laplace planteada (1) y las condiciones de contorno homogéneas. Calculemos ahora las C_n de modo tal que u satisfaga también la condición de contorno distinta de cero. O sea

$$U_0 = u(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{C_n \sinh\left(-\frac{n\pi a}{b}\right)}_{b_n} \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

Nuevamente, si observamos esta expresión, vemos que corresponde al desarrollo en serie de Fourier de $u(0, y)$ extendido en forma impar, pues aparecen solamente términos de senos. El valor de la frecuencia angular es $\omega_0 = \pi/b$, y por lo tanto, el periodo es $T = 2b$. Entonces el coeficiente b_n del desarrollo de Fourier es

$$b_n = C_n \sinh\left(-\frac{n\pi a}{b}\right) = \frac{2}{b} \int_0^b U_0 \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) dy$$

$$C_n \sinh\left(-\frac{n\pi a}{b}\right) = -\frac{2}{b} \frac{U_0}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \Big|_0^b$$

$$C_n \sinh\left(-\frac{n\pi a}{b}\right) = -\frac{2U_0}{n\pi} (\cos(n\pi) - 1)$$

$$C_n \sinh\left(-\frac{n\pi a}{b}\right) = -\frac{2U_0}{n\pi} ((-1)^n - 1)$$

$$C_n \sinh\left(-\frac{n\pi a}{b}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{4U_0}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Además se cumple que

$$\sinh\left(-\frac{n\pi a}{b}\right) = -\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)$$

Resultando que

$$C_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{-4U_0}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad (12)$$

Reemplazando (12) en (11) y teniendo en cuenta que los n impares son de la forma $n = 2k - 1$, resulta que la solución al problema viene dada por

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4U_0}{(2k-1)\pi \sinh\left(\frac{(2k-1)\pi a}{b}\right)} \sinh\left(\frac{(2k-1)\pi}{b}(x-a)\right) \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{b} y\right)$$

Problema 2:

Veamos ahora el procedimiento para resolver la ecuación de Laplace

$$\Delta u = 0$$

en el rectángulo con las condiciones indicadas en la Figura 2.

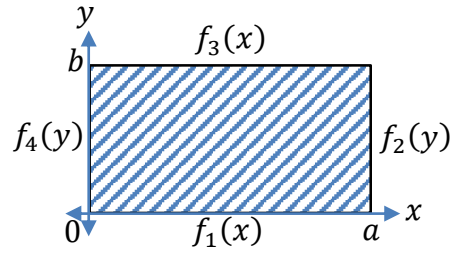


Figura 2

El modelo matemático es :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, 0) = f_1(x) \\ u(a, y) = f_2(y) \\ u(x, b) = f_3(x) \\ u(0, y) = f_4(y) \end{cases}$$

Dividiremos el problema en cuatro sub-problemas:

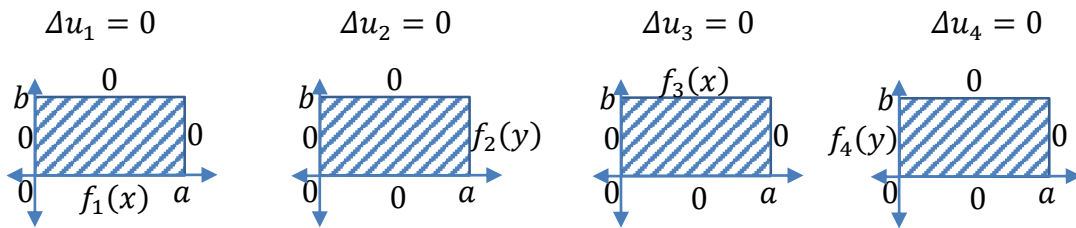


Figura 3

y la solución de cada una de ellas la llamaremos u_1, u_2, u_3, u_4 respectivamente. Luego

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

satisface el problema original, pues por la linealidad de las derivadas se tiene que

$$\Delta u = \Delta u_1 + \Delta u_2 + \Delta u_3 + \Delta u_4 = 0$$

Además reemplazando las condiciones de contorno

$$u(x, 0) = u_1(x, 0) + u_2(x, 0) + u_3(x, 0) + u_4(x, 0)$$

$$u(x, 0) = f_1(x) + 0 + 0 + 0 = f_1(x)$$

$$u(a, y) = u_1(a, y) + u_2(a, y) + u_3(a, y) + u_4(a, y)$$

$$u(a, y) = 0 + f_2(y) + 0 + 0 = f_2(y)$$

$$u(x, b) = u_1(x, b) + u_2(x, b) + u_3(x, b) + u_4(x, b)$$

$$u(x, b) = 0 + 0 + f_3(x) + 0 = f_3(x)$$

$$u(0, y) = u_1(0, y) + u_2(0, y) + u_3(0, y) + u_4(0, y)$$

$$u(0, y) = 0 + 0 + 0 + f_4(y) = f_4(y)$$

Se resuelve cada uno de los sub-problemas por separado, y se suman las soluciones respectivas

Problema 3: Resolver la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ en la placa rectangular con las condiciones indicadas en la Figura4

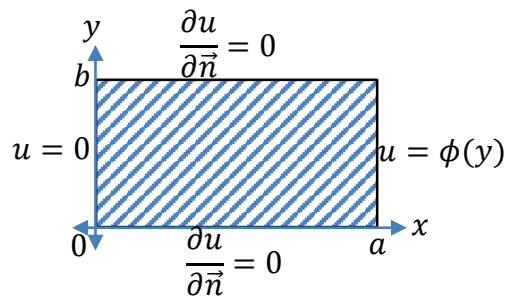


Figura 4

Solución:

El vector normal $\vec{n}$ saliente en las caras horizontales inferior y superior es $\vec{n} = -\vec{e}_2$ y $\vec{n} = \vec{e}_2$ respectivamente. Por lo que las expresiones para los flujos en esas caras vienen dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, 0) = \overrightarrow{\text{grad } u} \cdot (-\vec{e}_2) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, 0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot (0, -1) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, 0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0$$

Análogamente

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, b) = \overrightarrow{\text{grad } u} \cdot \vec{e}_2 = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, b) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot (0, 1) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, b) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, b) = 0$$

Por lo tanto, el planteo matemático del problema resulta ser:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0 \\ u(a, y) = \phi(y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, b) = 0 \\ u(0, y) = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

Resolvemos la ecuación de Laplace con las condiciones de contorno siguiendo el procedimiento de separación de variables:

Pasos a) y b) Si $u(x, y) = X(x)Y(y)$ resulta de (1) que

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = cte \quad (2)$$

Paso c) Considerando dos lados opuestos con condiciones de contorno nulas, resulta que

$$0 = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = X(x)Y'(0) \Rightarrow \underline{Y'(0) = 0}$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial y}(x, b) = X(x)Y'(b) \Rightarrow \underline{Y'(b) = 0}$$

Luego de (2), y las condiciones de contorno nulas se obtiene

$$\left\{ \begin{array}{l} Y'' - cte \cdot Y = 0 \\ Y'(0) = Y'(b) = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

Paso d) Debido a que Y' debe tener al menos dos raíces, Y no puede ser una combinación lineal de exponenciales. Luego se debe considerar $cte = -\lambda^2$, resultando que

$$\left\{ \begin{array}{l} Y'' + \lambda^2 Y = 0 \\ Y'(0) = Y'(b) = 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

Donde las raíces de la Ecuación Característica son complejas conjugadas, $(0 \pm \lambda j)$. Entonces la solución es

$$Y(y) = C_1 \cos \lambda y + C_2 \sen \lambda y$$

Para calcular las constantes se debe derivar la función $Y(y)$ y reemplazar las condiciones de contorno

$$Y'(y) = -C_1 \lambda \sen \lambda y + C_2 \lambda \cos \lambda y$$

Luego

$$Y'(0) = 0 = C_2 \lambda \quad \Rightarrow \quad \underline{C_2 = 0}$$

Como $C_2 = 0$, debemos buscar que $C_1 \neq 0$ para que $Y(y)$ no sea trivial. Luego

$$\begin{aligned} Y'(b) = 0 = -C_1 \lambda \sin \lambda b &\Rightarrow \lambda = 0 \quad \text{o} \quad \sin \lambda b = 0 \\ &\Rightarrow \underline{\lambda_n = \frac{n\pi}{b}} \text{ con } n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Tenemos una posible solución para cada n entero no negativo, y viene dada por:

$$\begin{aligned} Y_n(y) &= C_{1,n} \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad \text{para } n > 0 \quad (5) \\ Y_0(y) &= C_{1,0} \end{aligned}$$

Nota: Las condiciones de contornos dadas en términos de flujos condujo a soluciones Y_n en forma de coseno y no en forma de seno como resultó anteriormente. Además, aparece una posible solución constante.

Paso e) Para cada λ_n con $n > 0$ resolvamos

$$X_n'' - \lambda_n^2 X_n = 0 \quad (6)$$

obteniendo

$$X_n(x) = A_n e^{\lambda_n x} + B_n e^{-\lambda_n x} \quad (7)$$

Incluyendo ahora la condición de contorno nula restante, resulta

$$0 = u(0, y) = X(0)Y(y) \Rightarrow X(0) = 0$$

Esto implica que cada X_n debe verificar que

$$X_n(0) = 0 \quad (8)$$

Reemplazando (8) en (7)

$$0 = X_n(0) = A_n e^{\lambda_n 0} + B_n e^{-\lambda_n 0} \Rightarrow B_n = -A_n \quad (9)$$

Reemplazando (9) en (7)

$$\begin{aligned} X_n(x) &= A_n e^{\lambda_n x} - A_n e^{-\lambda_n x} \\ X_n(x) &= 2A_n \frac{e^{\lambda_n x} - e^{-\lambda_n x}}{2} \\ X_n(x) &= C_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \quad (10) \end{aligned}$$

donde $C_n = 2A_n$.

Nota: Cuando la condición de contorno no homogénea se encuentra fuera de uno de los ejes, es más sencillo hallar la expresión de $X_n(x)$. Para más detalles comparar la complejidad de este paso con el paso e) del Problema 1.

Debemos incorporar un análisis adicional para $\lambda_0 = 0$. De (2) resulta que $X_0'' = 0$, y por ende $X_0(x) = A_0x + B_0$. Como $X_0(0) = 0$, resulta que $B_0 = 0$, y por ende

$$X_0(x) = A_0x$$

Paso f) De (5) y (10) se conforman las funciones

$$u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y) = C_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \quad \text{para } n > 0$$

$$u_0(x, y) = X_0(x)Y_0(y) = C_0x \cos\left(\frac{0\pi}{b}y\right) = C_0x$$

donde las ctes C_n absorben y unifican constantes previas. Luego

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) \\ u(x, y) &= C_0x + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \end{aligned} \quad (11)$$

La función (11) satisface la ecuación (1) y las condiciones de contorno homogéneas. Calculemos ahora las C_n de modo tal que u satisfaga también la condición de contorno distinta de cero.

$$\phi(y) = u(a, y) = C_0a + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{C_n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}_{a_n} \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (12)$$

Con el mismo razonamiento que en los ejercicios anteriores resulta que (12) es el desarrollo en serie de Fourier con extensión par de la función $\phi(y)$ donde $\omega_0 = \pi/b$ y el período es $T = 2b$, luego el coeficiente a_n se calcula como

$$\begin{aligned} a_n &= C_n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) = \frac{2}{b} \int_0^b \phi(y) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy, \quad \text{para } n > 0 \\ \frac{a_0}{2} &= C_0a = \frac{1}{b} \int_0^b \phi(y) dy \end{aligned}$$

Luego

$$C_n = \frac{2}{b \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \int_0^b \phi(y) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) dy \quad \text{para } n > 0 \quad (13)$$

$$C_0 = \frac{1}{ab} \int_0^b \phi(y) dy$$

La solución al problema viene dada por

$$u(x, y) = C_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

Con los coeficientes dados por

$$C_n = \frac{2}{b \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \int_0^b \phi(y) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) dy \quad \text{para } n > 0$$

$$C_0 = \frac{1}{ab} \int_0^b \phi(y) dy$$

BIBLIOGRAFÍA:

- 1) ANÁLISIS DE Fourier: MURRAY R. SPIEGEL. SERIE SCHAUM (MC GRAW HILL) (BIBLIOTECA).
- 2) ECUACIONES DE LA FÍSICA MATEMÁTICA: TIJONOV – SAMARSKY EDITORIAL MIR.