

SERIES DE FOURIER

FUNCIONES PERIÓDICAS

Definición: Diremos que una función $f(t)$ es **periódica** si está definida sobre $\mathbb{R}$ y existe un valor $T > 0$ tal que se cumple:

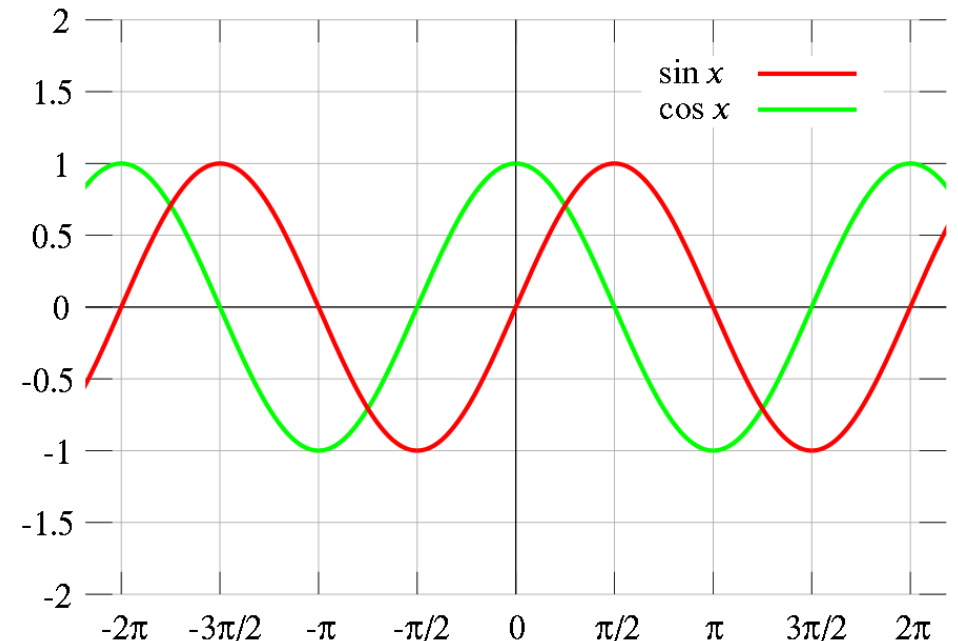
$$f(t + T) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Al mínimo número T que cumple esta condición lo llamaremos periodo de $f(t)$.

Note que una función periódica verifica que

$$f(t + nT) = f(t) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Luego, la gráfica de esta función se obtiene por repetición periódica de la gráfica en cualquier intervalo de longitud T



FUNCIONES PERIÓDICAS

$$f(t) = f(t + T)$$

$$f(t) = \text{sen}(t) = \text{sen}(t + 2\pi) = f(t + 2\pi)$$

$$f(t) = \text{sen}(2t) = \text{sen}(2t + 2\pi) = \text{sen}(2(t + \pi)) = f(t + \pi)$$

$$f(t) = \text{sen}(3t) = \text{sen}(3t + 2\pi) = \text{sen}\left(3\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = f\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Generalizando

$$f(t) = \text{sen}(\omega_0 t) = \text{sen}(\omega_0 t + 2\pi) = \text{sen}\left(\omega_0\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right) = f\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right)$$

Frecuencia
angular

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega_0 = 2\pi f$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

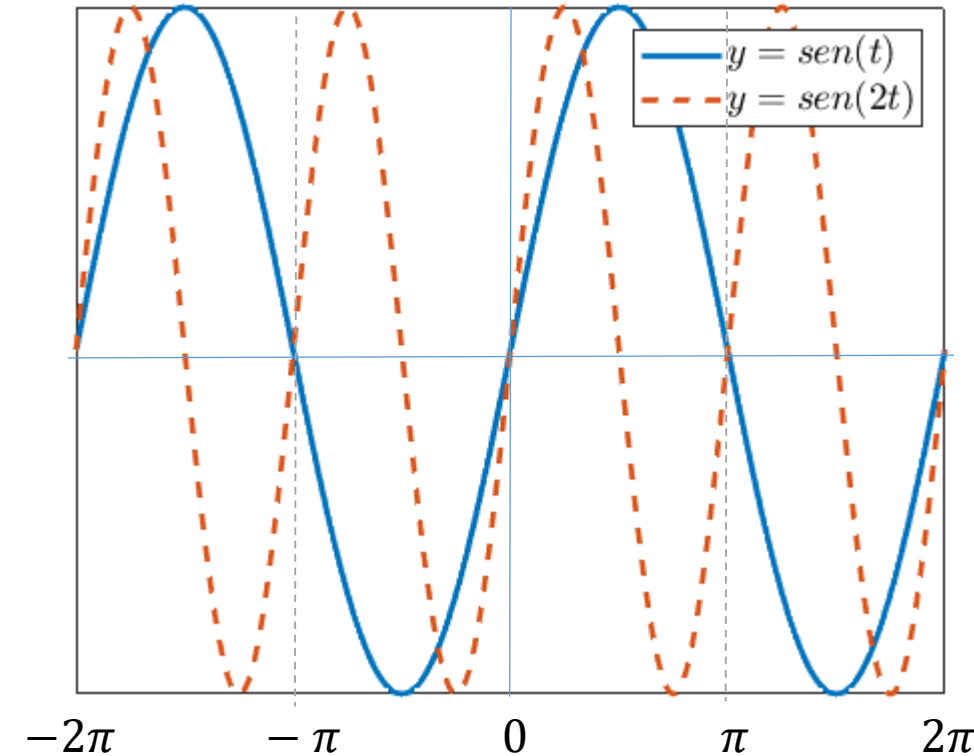
$$T = 2\pi$$

$$T = \pi$$

$$T = \frac{2\pi}{3}$$

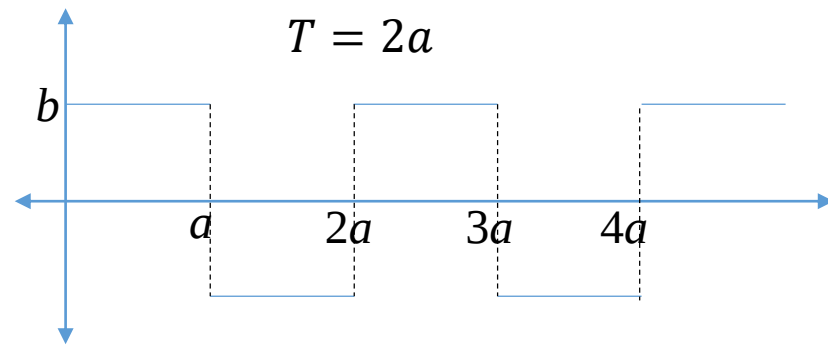
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Periodo



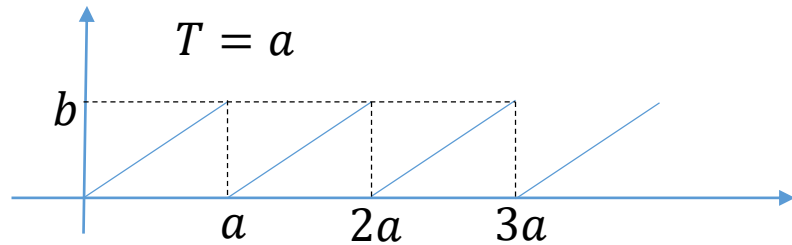
FUNCIONES PERIÓDICAS

Onda cuadrada



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{a}$$

Diente de sierra



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2}{a}\pi$$

FUNCIONES PARES

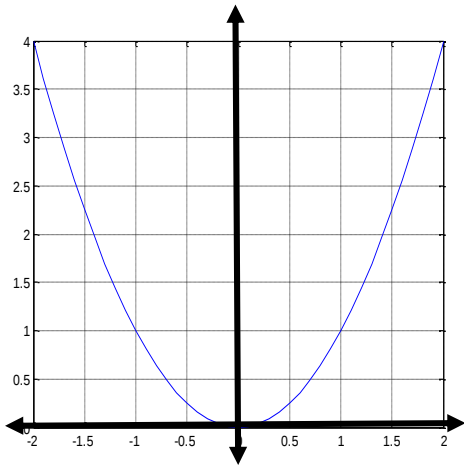
Definición: Una función es **Par** si se cumple

$$f(t) = f(-t)$$

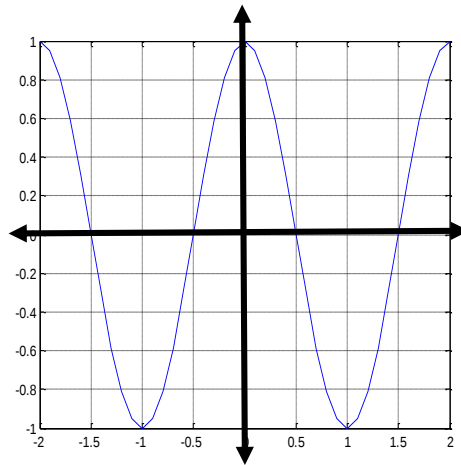
Las funciones pares tienen simetría respecto al eje y .

Ejemplo: $f(t) = \cos(t)$, $f(t) = t^2$, $f(t) = t^4$

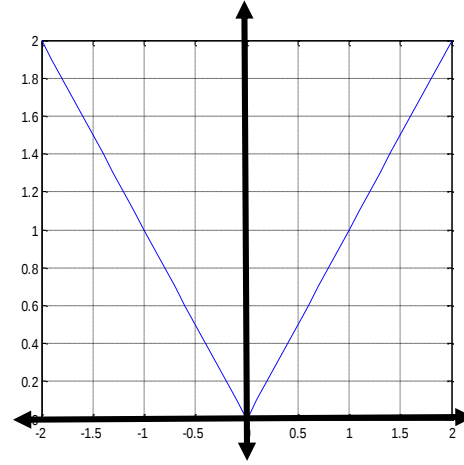
También la combinación lineal de funciones pares es una función par



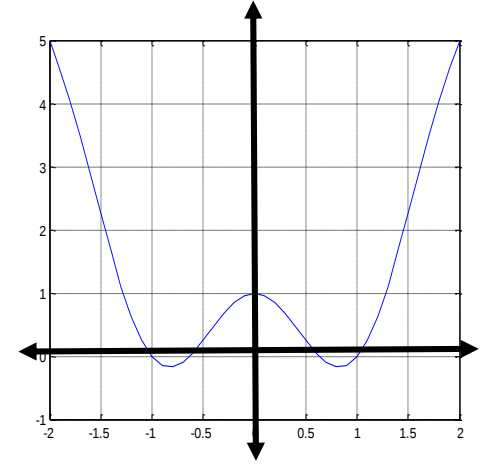
$$y = t^2$$



$$y = \cos(\pi t)$$



$$y = |x|$$



$$y = t^2 + \cos(\pi t)$$

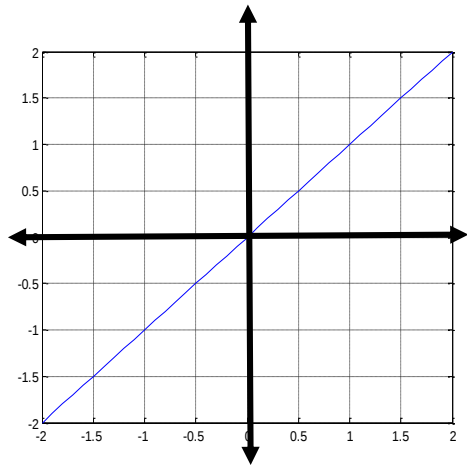
FUNCIONES IMPARES

Definición: Una función es **Impar** si se cumple

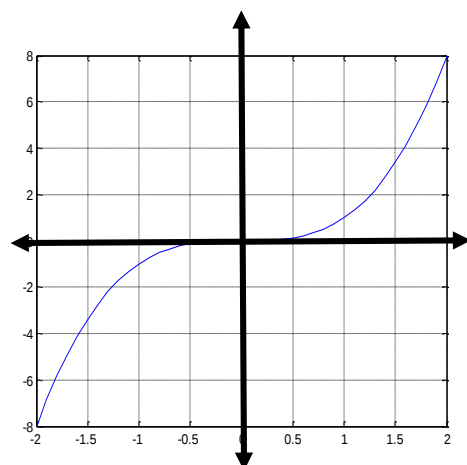
$$f(t) = -f(-t)$$

Las funciones impares tienen simetría respecto al origen.

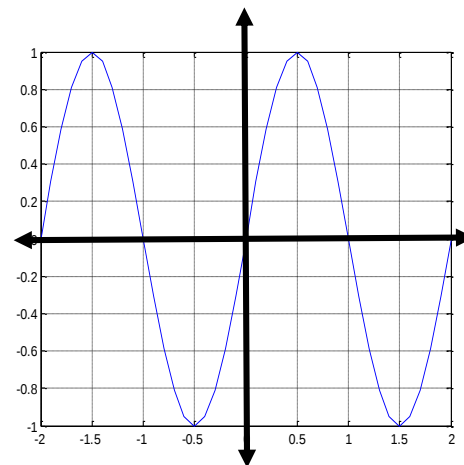
Ejemplo: $f(t) = \text{sen}(t)$, $f(t) = t^3$, $f(t) = t$, $f(t) = t^5$
la combinación lineal de funciones impares es una función impar



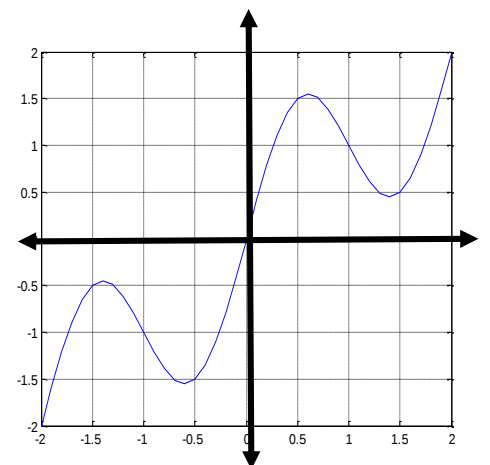
$$y = t$$



$$y = t^3$$



$$y = \text{sen}(\pi t)$$



$$y = t + \text{sen}(\pi t)$$

FUNCIONES PARES E IMPARES

Propiedad: Toda función $f(t)$ definida sobre los reales se puede descomponer como suma de una función par $f_p(t)$ mas una función impar $f_i(t)$

$$f(t) = f_p(t) + f_i(t)$$

Demostración: Dada una función $f(t)$ se definen

$$f_p(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \qquad f_i(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

Las cuales son par e impar respectivamente, y al sumarlas resulta $f(t)$.

Ejercicio: Proponer una función definida sobre todos los reales y descomponerla como suma de una función par y otra impar

FUNCIONES PARES E IMPARES

Propiedad: (integral sobre intervalos simétricos respecto al origen)

$$\int_{-a}^a f_p(t) dt = 2 \int_0^a f_p(t) dt$$

$$\int_{-a}^a f_i(t) dt = 0$$

Propiedad:

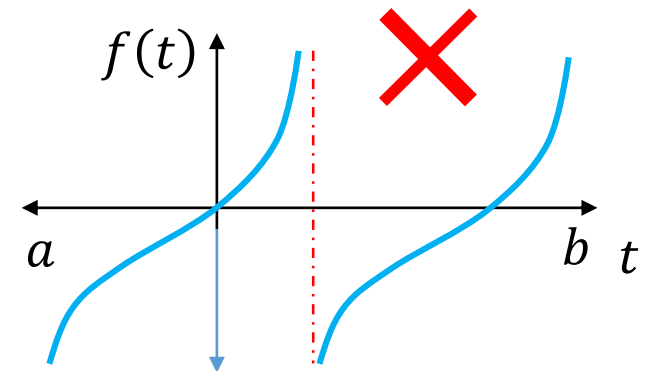
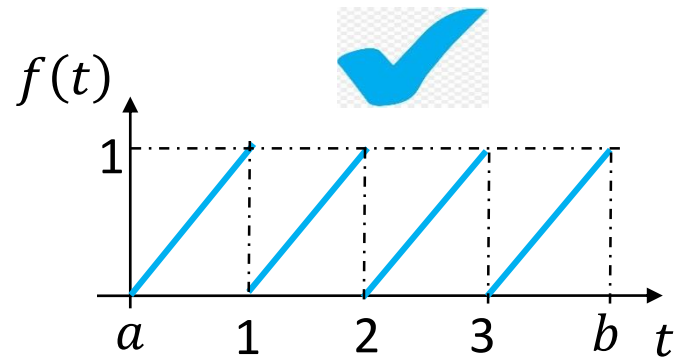
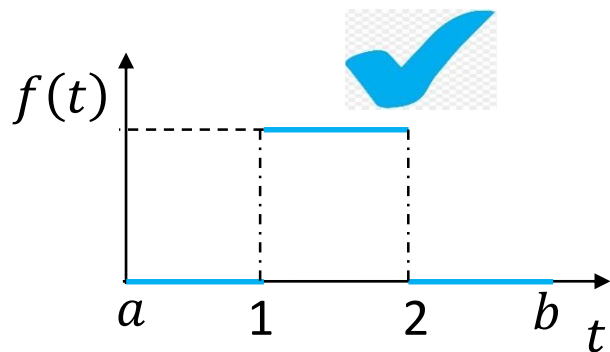
El producto de dos funciones pares es una función par $f_p \cdot f_p = f_p$

El producto de dos funciones impares es una función par $f_i \cdot f_i = f_p$

El producto de una función par con una función impar es una función impar $f_p \cdot f_i = f_i$

FUNCIONES CONTINUAS POR PARTES

Definición: Una función es **continua por partes en un intervalo $[a, b]$** si es continua en todos los puntos del intervalo excepto en un número finito de puntos, donde debe ser discontinua de salto finito, esto es, debe existir el límite por derecha e izquierda.



SERIES DE FOURIER

Dada una función periódica $f(t)$ de período T , diremos que admite un desarrollo en Serie de Fourier si se puede expresar como suma de senos y coseno de la siguiente manera

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

donde

Coeficientes de Fourier

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\ a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Valor medio} \\ \text{de la función} \end{array}$$

Note que gracias a que se usa $\frac{a_0}{2}$ resulta una fórmula unificada para todos los a_n ya que

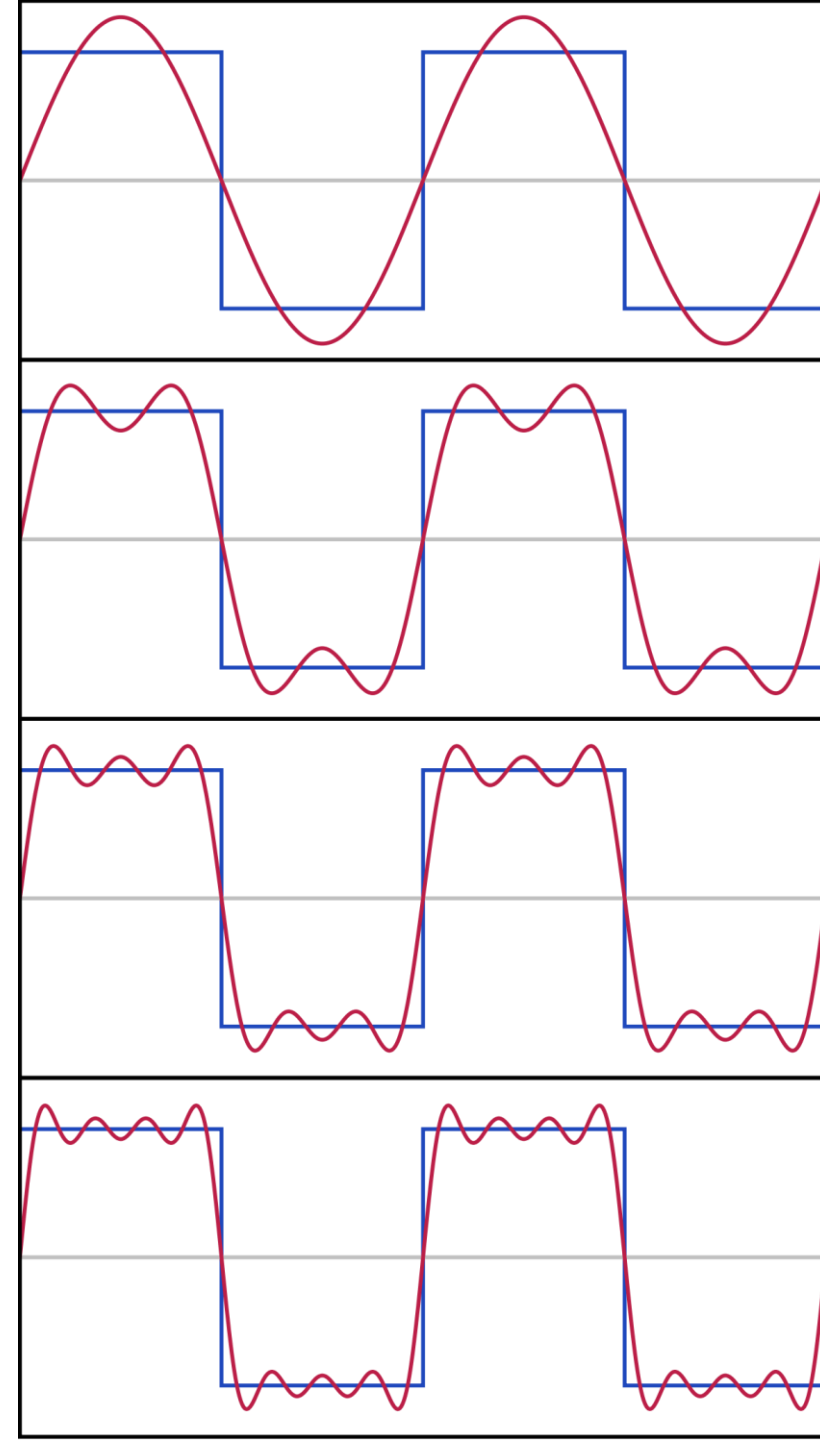
$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(0\omega_0 t) dt$$

SERIES DE FOURIER

Convergencia: Si $f(t)$ es continua por tramos y periódica de período T . Entonces, la serie de Fourier de $f(t)$ en el intervalo converge a $f(t)$ en todo punto de continuidad. Además, en cada punto de discontinuidad, la serie de Fourier converge al promedio

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

donde $f(t^+)$ y $f(t^-)$ denotan el límite de $f(t)$ en t , por la derecha y por la izquierda, respectivamente.

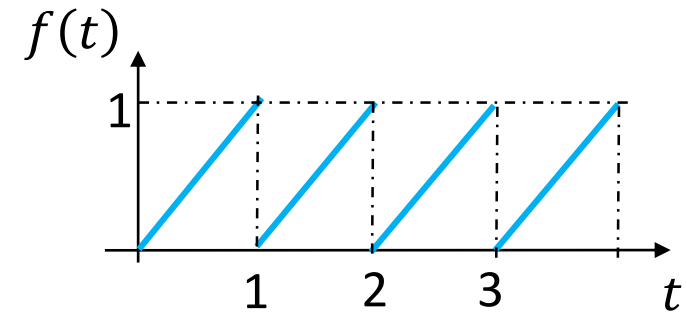


SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Si $f(t) = t$ con $t \in [0,1]$

Se la extiende a todo el dominio real de forma periódica con $T = 1$

Frecuencia angular: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$



$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \int_0^1 t dt = \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2} \quad \left. \vphantom{\int_0^1} \right\} \text{Valor medio de la función}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_0 t) dt = 2 \int_0^1 t \cos(n2\pi t) dt \\ &= 2 \left[t \frac{\text{sen}(n2\pi t)}{n2\pi} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\text{sen}(n2\pi t)}{n2\pi} dt \right] = t \frac{\text{sen}(n2\pi t)}{n\pi} \Big|_0^1 + \frac{\cos(n2\pi t)}{2n^2\pi^2} \Big|_0^1 \\ &= \left(\frac{\text{sen}(n2\pi)}{n\pi} - 0 \right) + \left(\frac{\cos(n2\pi)}{2n^2\pi^2} - \frac{\cos(0)}{2n^2\pi^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Si $f(t) = t$ con $t \in [0,1]$

Ancho del intervalo: $T = 1$

Frecuencia angular: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_n = 0$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt = 2 \int_0^1 t \operatorname{sen}(n2\pi t) dt \\ &= 2 \left[-t \frac{\cos(n2\pi t)}{n2\pi} \Big|_0^1 + \frac{\operatorname{sen}(n2\pi t)}{(n2\pi)^2} \Big|_0^1 \right] = \left(-\frac{\cos(n2\pi)}{n\pi} + 0 \right) + \left(\frac{\operatorname{sen}(n2\pi)}{2n^2\pi^2} - 0 \right) = -\frac{1}{n\pi} \end{aligned}$$

SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Si $f(t) = t$ con $t \in [0,1]$

Ancho del intervalo: $T = 1$

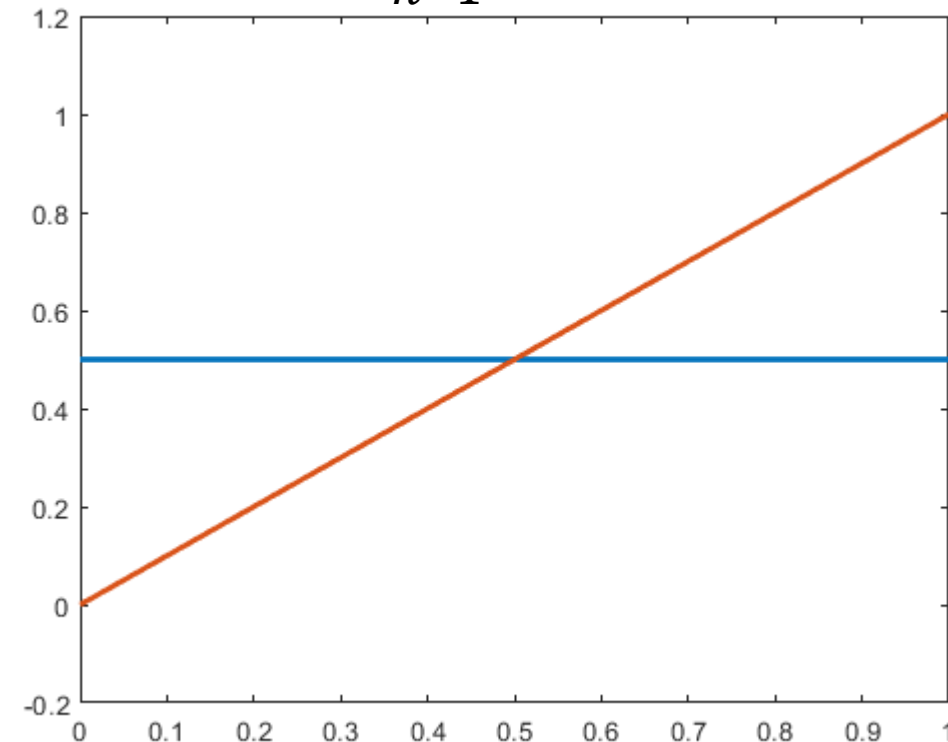
Frecuencia angular: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_n = 0 \qquad b_n = -\frac{1}{n\pi}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad f(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(2n\pi t)$$

$$n = 0 \Rightarrow f(t) \cong \frac{1}{2}$$



SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Si $f(t) = t$ con $t \in [0,1]$

Ancho del intervalo: $T = 1$

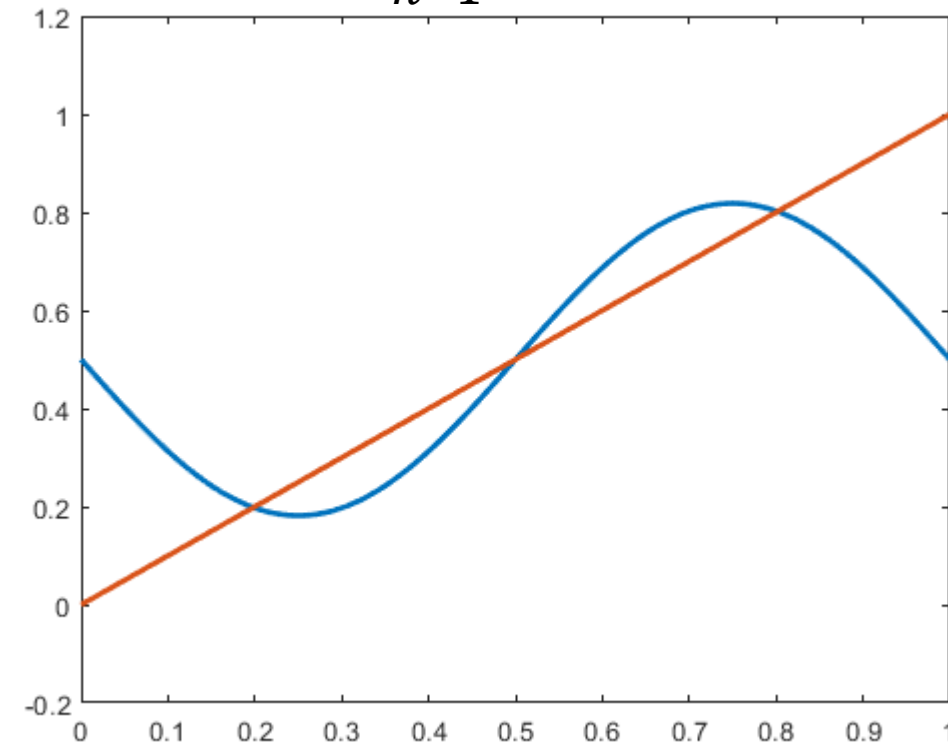
Frecuencia angular: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_n = 0 \qquad b_n = -\frac{1}{n\pi}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad f(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(2n\pi t)$$

$$n = 1 \Rightarrow f(t) \cong \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\pi t)}{\pi}$$



SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Si $f(t) = t$ con $t \in [0,1]$

Ancho del intervalo: $T = 1$

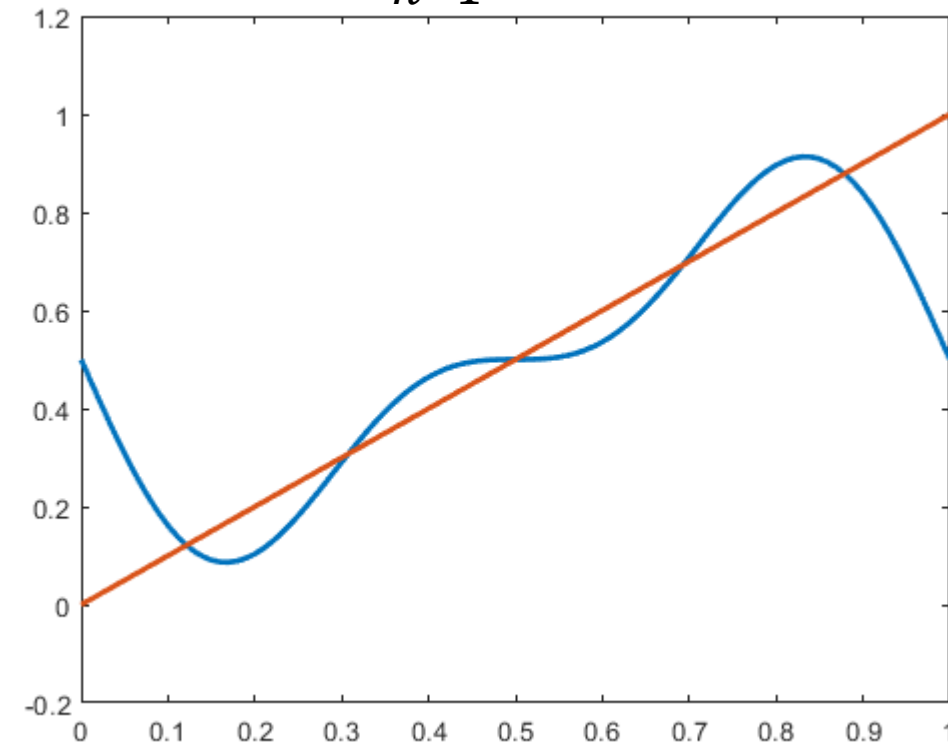
Frecuencia angular: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_n = 0 \qquad b_n = -\frac{1}{n\pi}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad f(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(2n\pi t)$$

$$n = 2 \Rightarrow f(t) \cong \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\pi t)}{\pi} - \frac{\operatorname{sen}(4\pi t)}{2\pi}$$



SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Si $f(t) = t$ con $t \in [0,1]$

Ancho del intervalo: $T = 1$

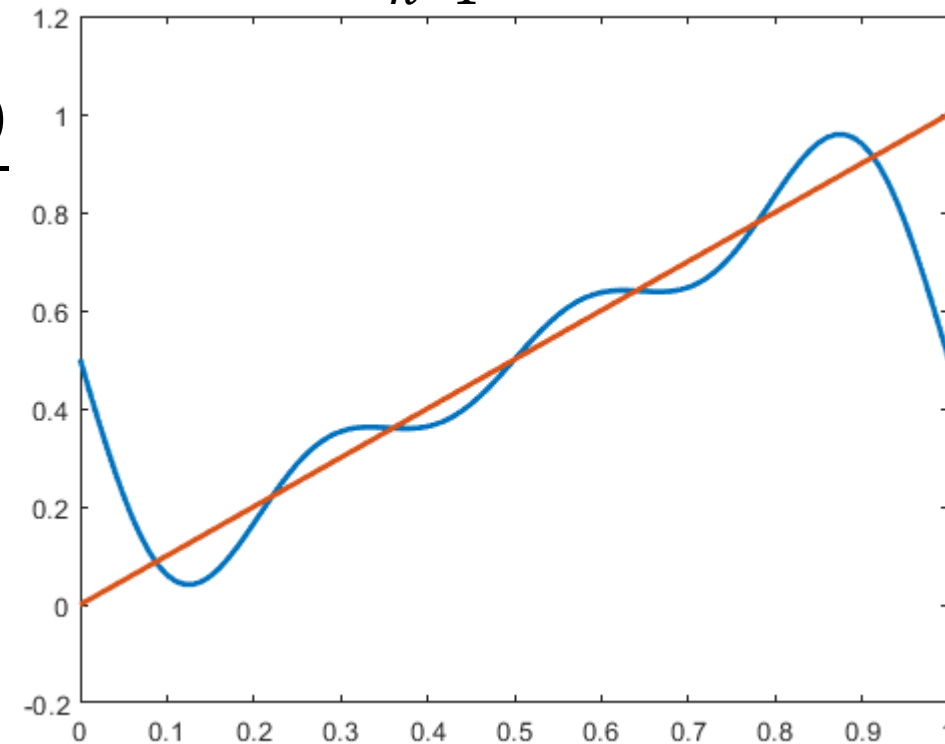
Frecuencia angular: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_n = 0 \qquad b_n = -\frac{1}{n\pi}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad f(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(2n\pi t)$$

$$n = 3 \Rightarrow f(t) \cong \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\pi t)}{\pi} - \frac{\operatorname{sen}(4\pi t)}{2\pi} - \frac{\operatorname{sen}(6\pi t)}{3\pi}$$



SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Si $f(t) = t$ con $t \in [0,1]$

Ancho del intervalo: $T = 1$

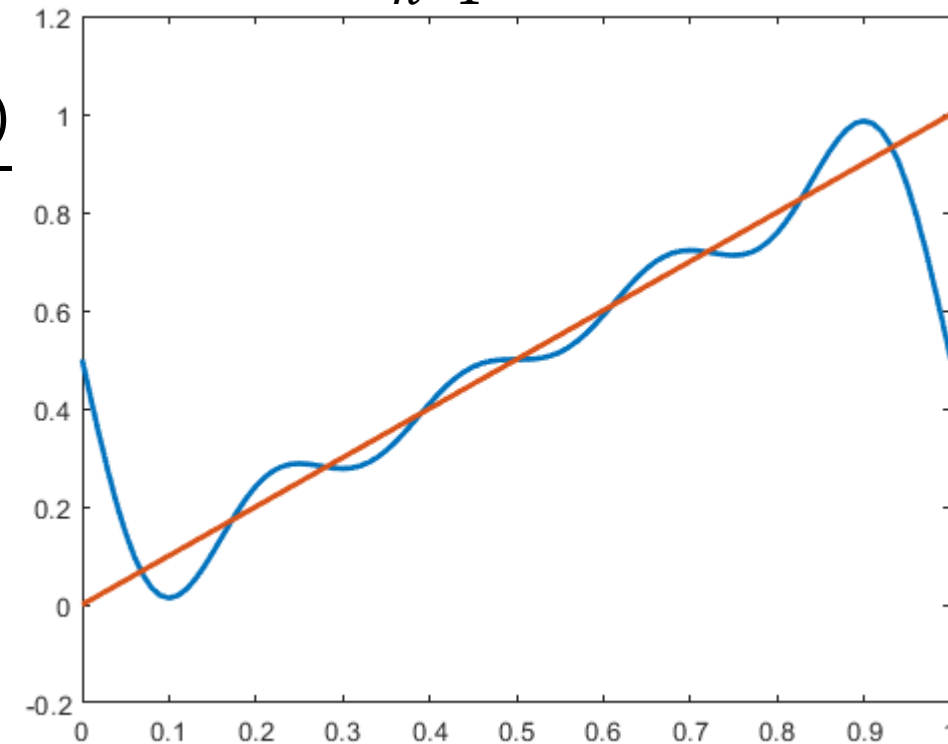
Frecuencia angular: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_n = 0 \qquad b_n = -\frac{1}{n\pi}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad f(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(2n\pi t)$$

$$n = 4 \Rightarrow f(t) \cong \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\pi t)}{\pi} - \frac{\operatorname{sen}(4\pi t)}{2\pi} - \frac{\operatorname{sen}(6\pi t)}{3\pi} - \frac{\operatorname{sen}(8\pi t)}{4\pi}$$



SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Si $f(t) = t$ con $t \in [0,1]$

Ancho del intervalo: $T = 1$

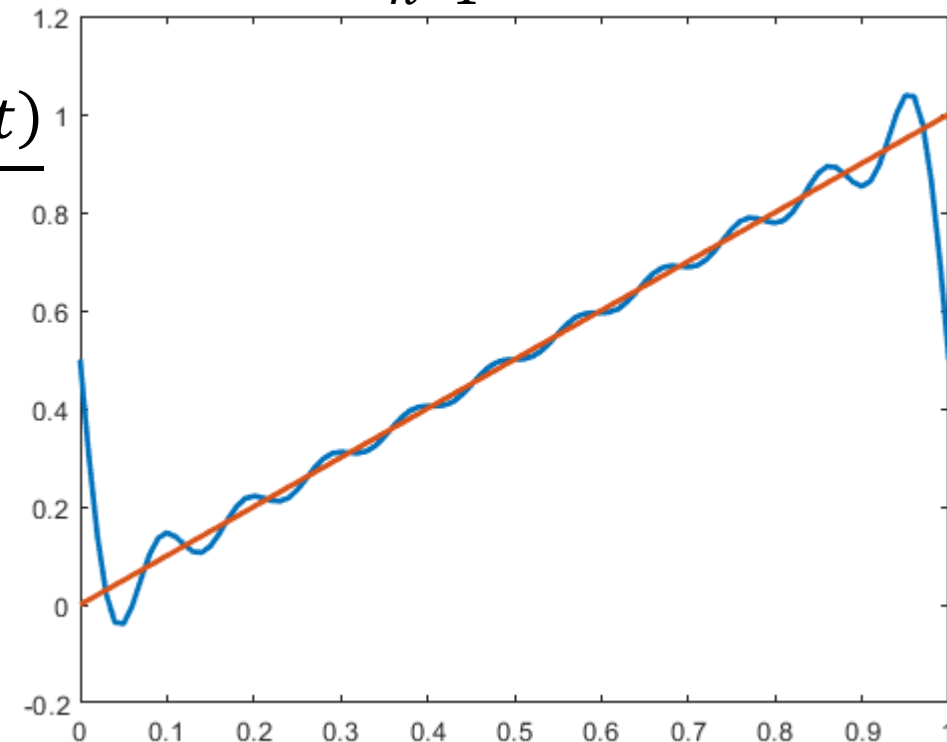
Frecuencia angular: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_n = 0 \qquad b_n = -\frac{1}{n\pi}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad f(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(2n\pi t)$$

$$n = 10 \Rightarrow f(t) \cong \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\pi t)}{\pi} - \frac{\operatorname{sen}(4\pi t)}{2\pi} - \frac{\operatorname{sen}(6\pi t)}{3\pi} - \frac{\operatorname{sen}(8\pi t)}{4\pi} - \dots - \frac{\operatorname{sen}(20\pi t)}{10\pi}$$



SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Si $f(t) = t$ con $t \in [0,1]$

Ancho del intervalo: $T = 1$

Frecuencia angular: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$

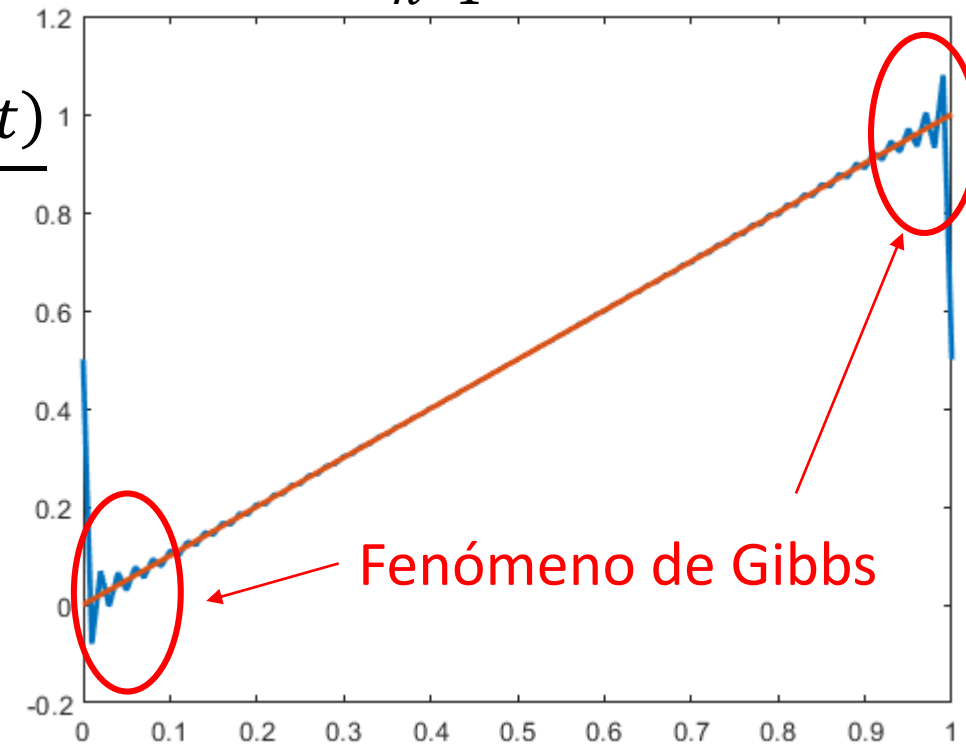
$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sin(2n\pi t)$$

$$n = 50 \Rightarrow f(t) \cong \frac{1}{2} - \frac{\sin(2\pi t)}{\pi} - \frac{\sin(4\pi t)}{2\pi} - \frac{\sin(6\pi t)}{3\pi} - \frac{\sin(8\pi t)}{4\pi} - \dots - \frac{\sin(100\pi t)}{50\pi}$$



SERIES DE FOURIER

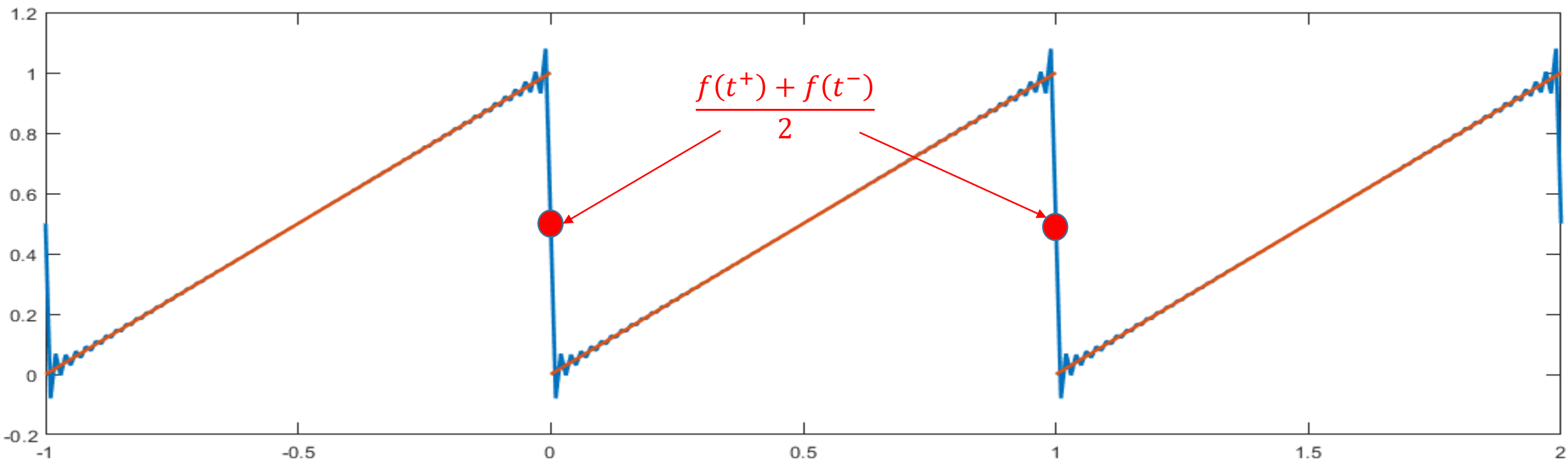
Ejemplo: Si $f(t) = t$ con $t \in [0,1]$

Ancho del intervalo: $T = 1$

Frecuencia angular: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$

$$f(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(2n\pi t)$$

Extensión Periódica



SERIE DE FOURIER DE FUNCIONES PARES

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

GENERAL

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt$$

FUNCIONES PARES

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{f(t)}_{\text{par}} dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{f(t) \cos(n\omega_0 t)}_{\text{par} * \text{par} = \text{par}} dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{f(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t)}_{\text{par} * \text{impar} = \text{impar}} dt = 0$$

SERIE DE FOURIER DE FUNCIONES IMPARES

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

GENERAL

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt$$

FUNCIONES IMPARES

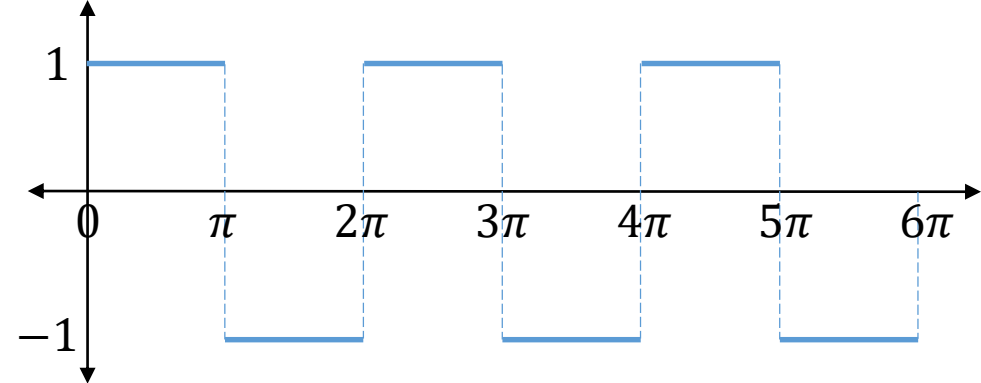
$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{f(t)}_{\text{impar}} dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{f(t) \cos(n\omega_0 t)}_{\text{impar} * \text{par} = \text{impar}} dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{f(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t)}_{\text{impar} * \text{impar} = \text{par}} dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt$$

SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Hallar el desarrollo de Fourier de la siguiente señal



Es una función periódica con periodo $T = 2\pi$

Frecuencia angular: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$

Si la extendemos a la parte negativa del eje temporal resulta una función impar

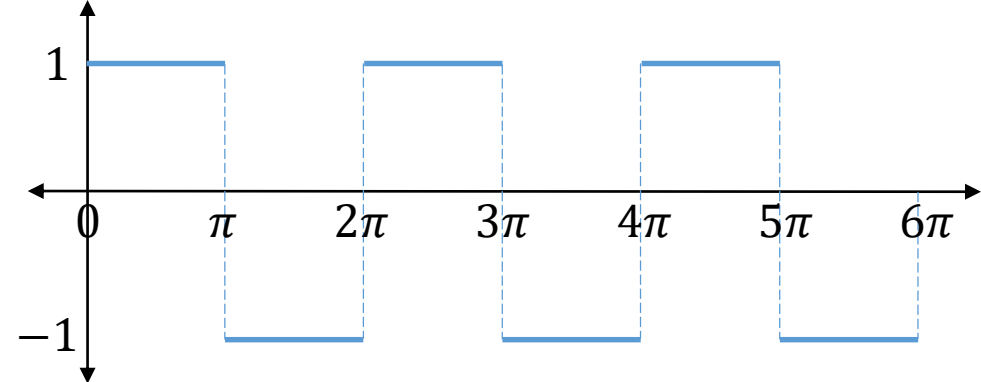
Luego $a_n = 0 \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \operatorname{sen}(n1t) dt = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\cos(nt)}{n} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi} (-\cos(n\pi) + 1)$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi} (-(-1)^n + 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{2k} = 0 & \forall k = 1, 2, 3, \dots \\ b_{2k-1} = \frac{4}{(2k-1)\pi} & \forall k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Hallar el desarrollo de Fourier de la siguiente señal



$$T = 2\pi; \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$$

$$a_n = 0 \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{cases} b_{2k} = 0 & \forall k = 1, 2, 3, \dots \\ b_{2k-1} = \frac{4}{(2k-1)\pi} & \forall k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

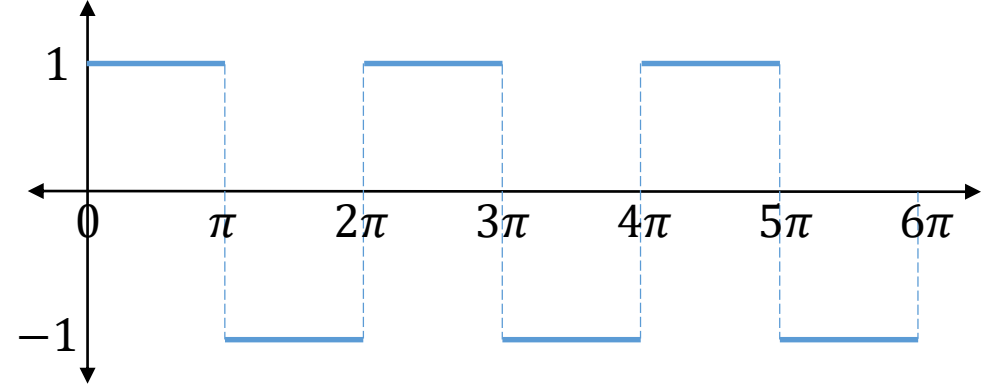
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k-1} \sin((2k-1)t)$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin((2k-1)t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)t)}{2k-1}$$

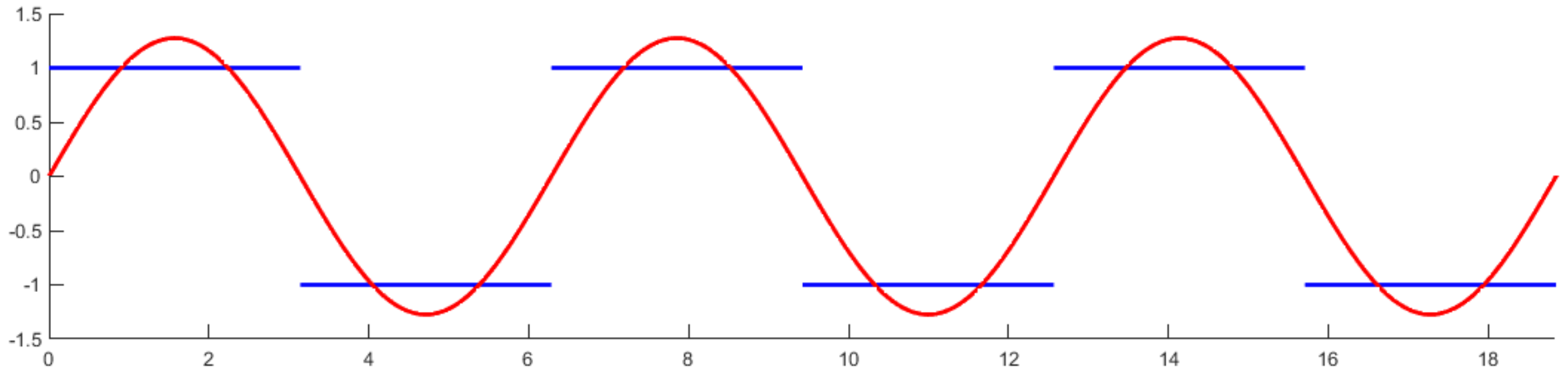
SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Hallar el desarrollo de Fourier de la siguiente señal

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen}((2k-1)t)}{2k-1}$$



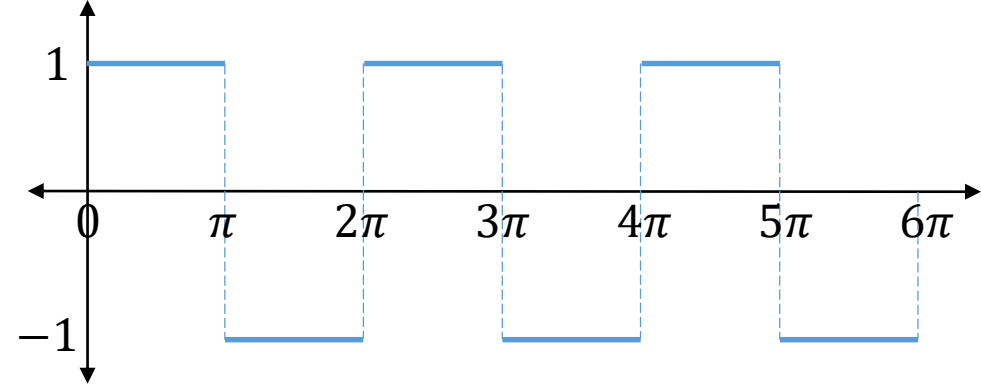
$$f(t) \approx S_1 = \frac{4}{\pi} \text{sen}(t)$$



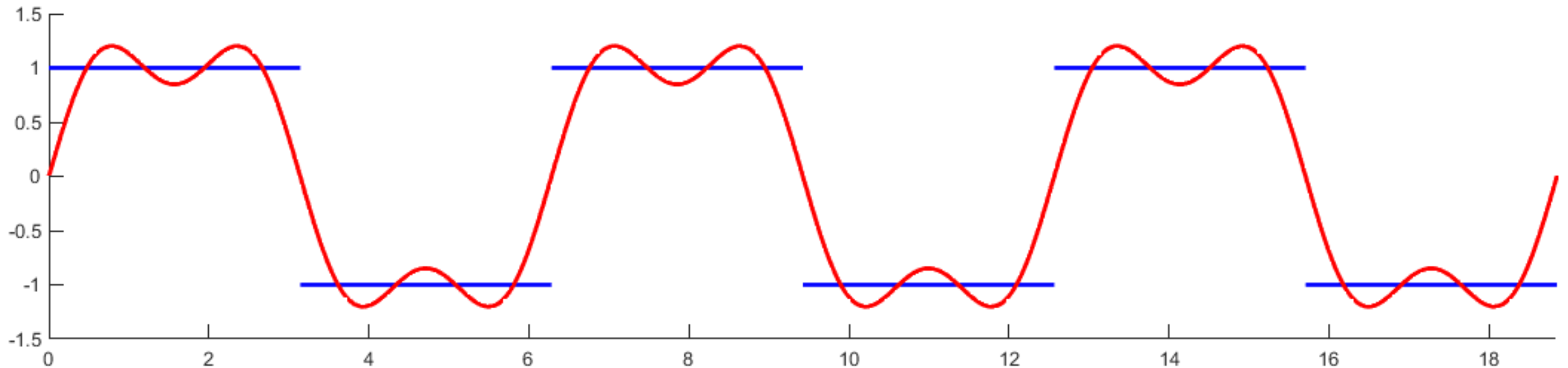
SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Hallar el desarrollo de Fourier de la siguiente señal

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen}((2k-1)t)}{2k-1}$$



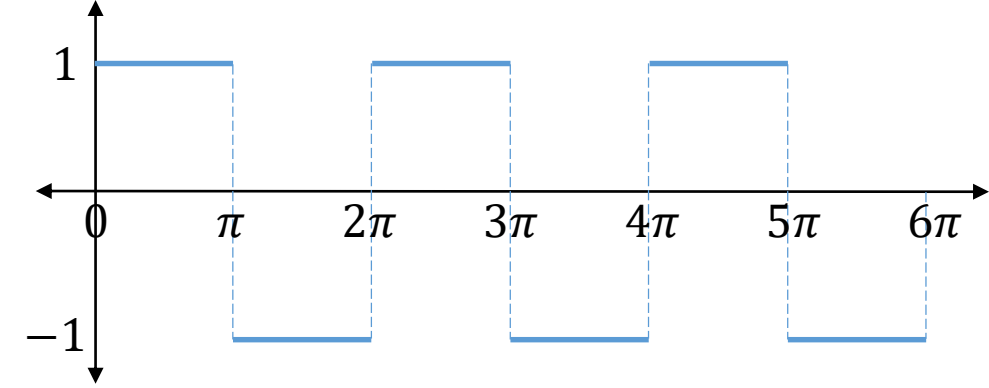
$$f(t) \approx S_2 = \frac{4}{\pi} \text{sen}(t) + \frac{4}{3\pi} \text{sen}(3t)$$



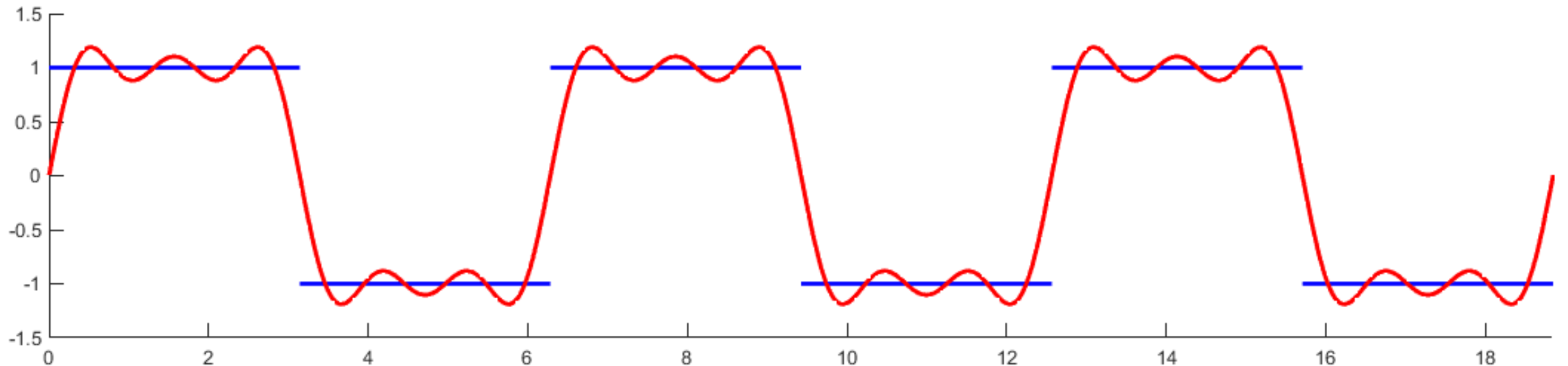
SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Hallar el desarrollo de Fourier de la siguiente señal

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen}((2k-1)t)}{2k-1}$$



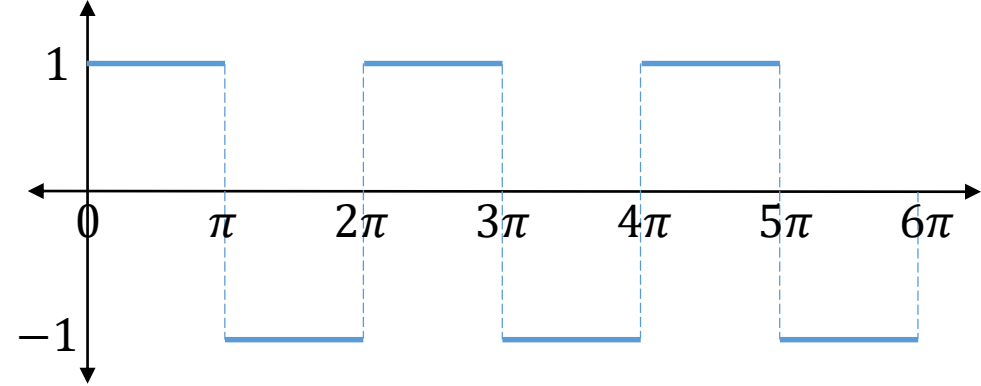
$$f(t) \approx S_3 = \frac{4}{\pi} \text{sen}(t) + \frac{4}{3\pi} \text{sen}(3t) + \frac{4}{5\pi} \text{sen}(5t)$$



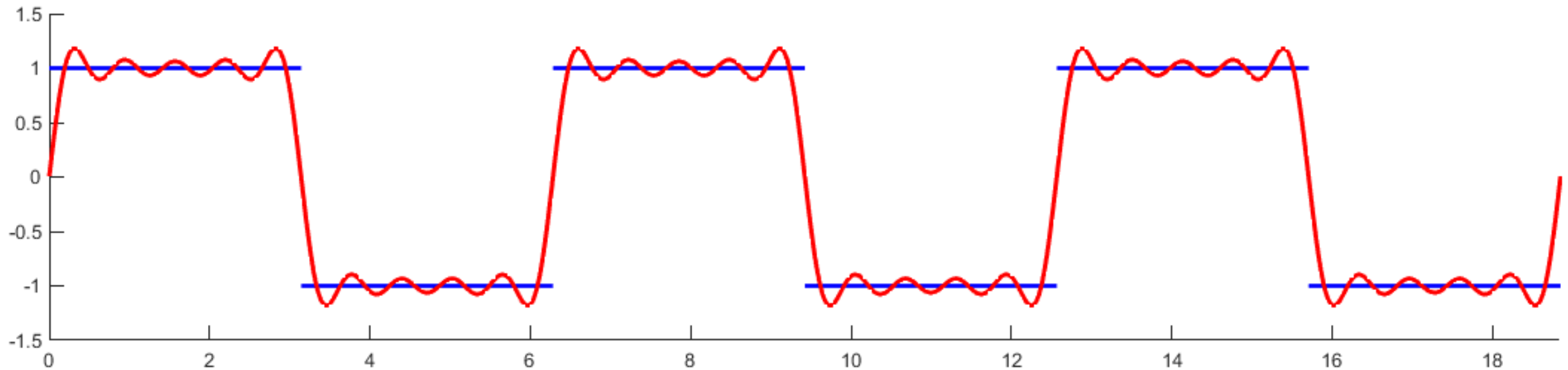
SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Hallar el desarrollo de Fourier de la siguiente señal

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen}((2k-1)t)}{2k-1}$$



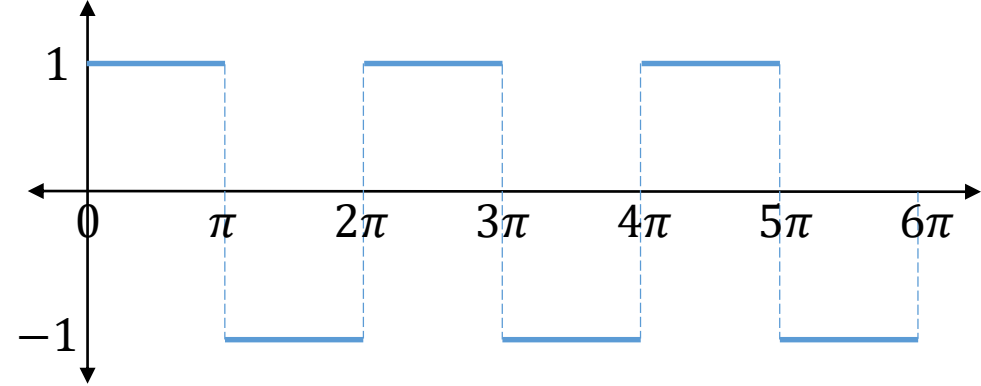
$$f(t) \approx S_5 = \frac{4}{\pi} \text{sen}(t) + \frac{4}{3\pi} \text{sen}(3t) + \frac{4}{5\pi} \text{sen}(5t) + \dots + \frac{4}{9\pi} \text{sen}(9t)$$



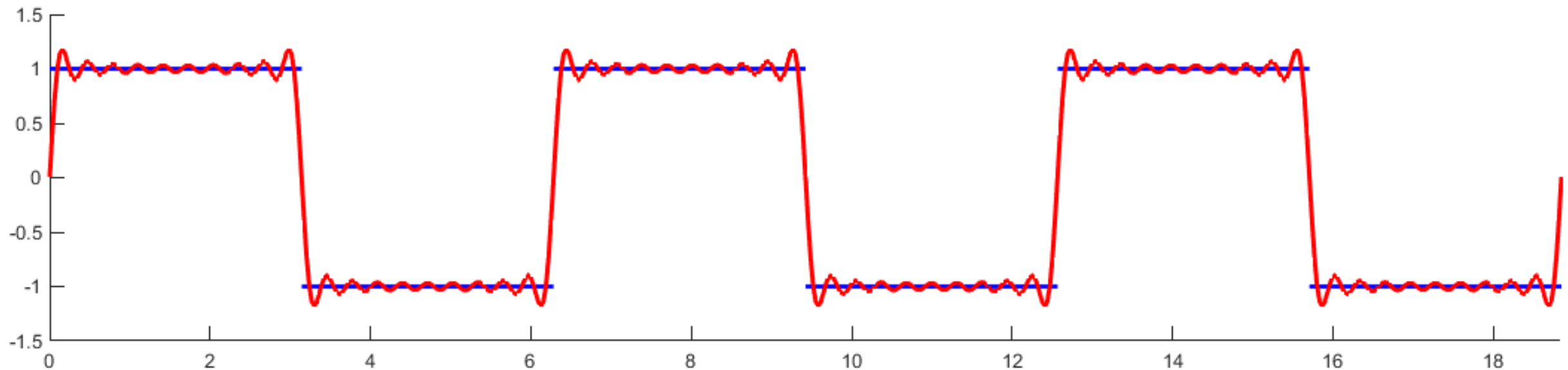
SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Hallar el desarrollo de Fourier de la siguiente señal

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen}((2k-1)t)}{2k-1}$$



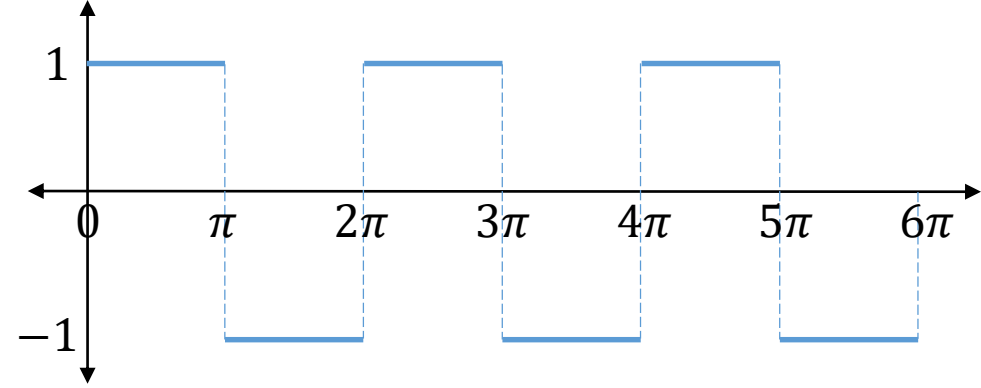
$$f(t) \approx S_{10} = \frac{4}{\pi} \text{sen}(t) + \frac{4}{3\pi} \text{sen}(3t) + \frac{4}{5\pi} \text{sen}(5t) + \dots + \frac{4}{19\pi} \text{sen}(19t)$$



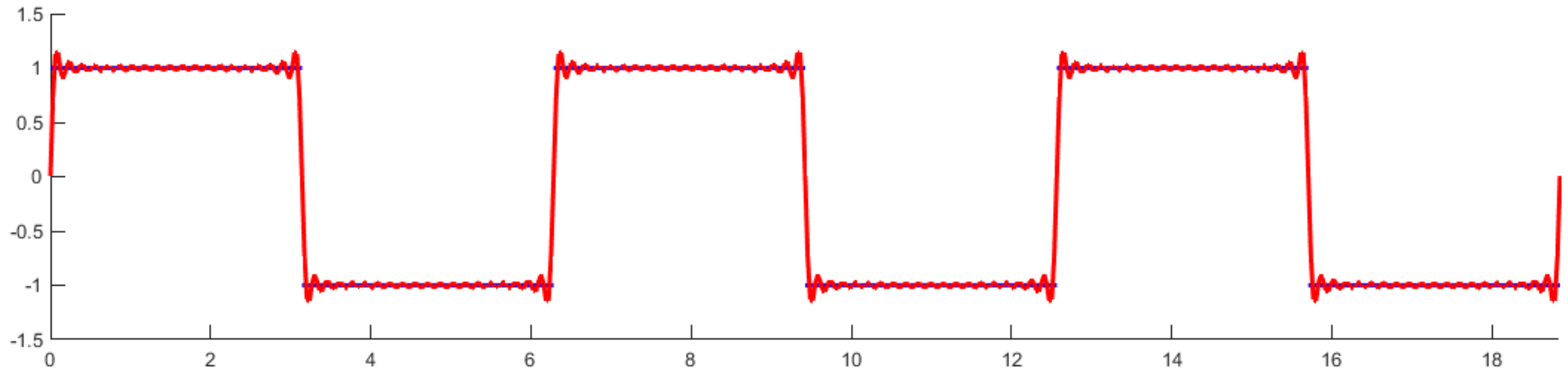
SERIES DE FOURIER

Ejemplo: Hallar el desarrollo de Fourier de la siguiente señal

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen}((2k-1)t)}{2k-1}$$



$$f(t) \approx S_{20} = \frac{4}{\pi} \text{sen}(t) + \frac{4}{3\pi} \text{sen}(3t) + \frac{4}{5\pi} \text{sen}(5t) + \cdots + \frac{4}{39\pi} \text{sen}(39t)$$



SERIES DE FOURIER COMPLEJA

Recordemos que

$$\left. \begin{aligned} e^{jn\omega_0 t} &= \cos(n\omega_0 t) + j \sin(n\omega_0 t) \\ e^{-jn\omega_0 t} &= \cos(n\omega_0 t) - j \sin(n\omega_0 t) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \text{sumando: } \frac{1}{2} (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) &= \cos(n\omega_0 t) \\ \text{restando: } \frac{1}{2j} (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) &= \sin(n\omega_0 t) \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) + \frac{b_n}{2j} (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) \right) \\ &= \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{c_0} \underbrace{e^{j0\omega_0 t}}_{=1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2j} \right)}_{c_n} e^{jn\omega_0 t} + \underbrace{\left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2j} \right)}_{c_{-n}} e^{-jn\omega_0 t} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

SERIES DE FOURIER COMPLEJA

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

donde, si $n \geq 1$ resulta

$$c_n = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2j} = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_0 t) dt - j \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt \right)$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_0 t) dt - \frac{j}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) (\cos(n\omega_0 t) - j \operatorname{sen}(n\omega_0 t)) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

SERIES DE FOURIER COMPLEJA

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

De igual modo

$$c_{-n} = \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2j} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{jn\omega_0 t} dt$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{j0\omega_0 t} dt$$

En general para todo n

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

SERIES DE FOURIER CON AMPLITUD Y FASE

Recordemos que

$$\cos(n\omega_0 t - \theta_n) = \cos(n\omega_0 t) \cos(\theta_n) + \sin(n\omega_0 t) \sin(\theta_n)$$

Luego

$$A_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n) = \underbrace{A_n \cos(\theta_n)}_{a_n = 2\operatorname{Re}(c_n)} \cos(n\omega_0 t) + \underbrace{A_n \sin(\theta_n)}_{b_n = -2\operatorname{Im}(c_n)} \sin(n\omega_0 t)$$

Sumando

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

donde la amplitud A_n y la fase θ_n vienen dadas por

$$\begin{aligned} a_n &= A_n \cos(\theta_n) \\ b_n &= A_n \sin(\theta_n) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \theta_n &= \operatorname{atan} \frac{b_n}{a_n} = \operatorname{atan} \left(-\frac{\operatorname{Im}(c_n)}{\operatorname{Re}(c_n)} \right) \\ A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|c_n| \end{aligned}$$

$$A_0 = \frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

SERIES DE FOURIER CON AMPLITUD Y FASE

Recordemos que

$$\operatorname{sen}(n\omega_0 t + \theta_n) = \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \cos(\theta_n) + \cos(n\omega_0 t) \operatorname{sen}(\theta_n)$$

Luego

$$A_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t + \theta_n) = \underbrace{A_n \cos(\theta_n)}_{b_n = -2\operatorname{Im}(c_n)} \operatorname{sen}(n\omega_0 t) + \underbrace{A_n \operatorname{sen}(\theta_n)}_{a_n = 2\operatorname{Re}(c_n)} \cos(n\omega_0 t)$$

Sumando

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t + \theta_n) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t))$$

donde la amplitud A_n y la fase θ_n vienen dadas por

$$\begin{aligned} a_n &= A_n \operatorname{sen}(\theta_n) \\ b_n &= A_n \cos(\theta_n) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \theta_n &= \operatorname{atan} \frac{a_n}{b_n} = \operatorname{atan} \left(-\frac{\operatorname{Re}(c_n)}{\operatorname{Im}(c_n)} \right) \\ A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|c_n| \end{aligned}$$

$$A_0 = \frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$