

NÚMEROS COMPLEJOS Y FUNCIONES ANALÍTICAS

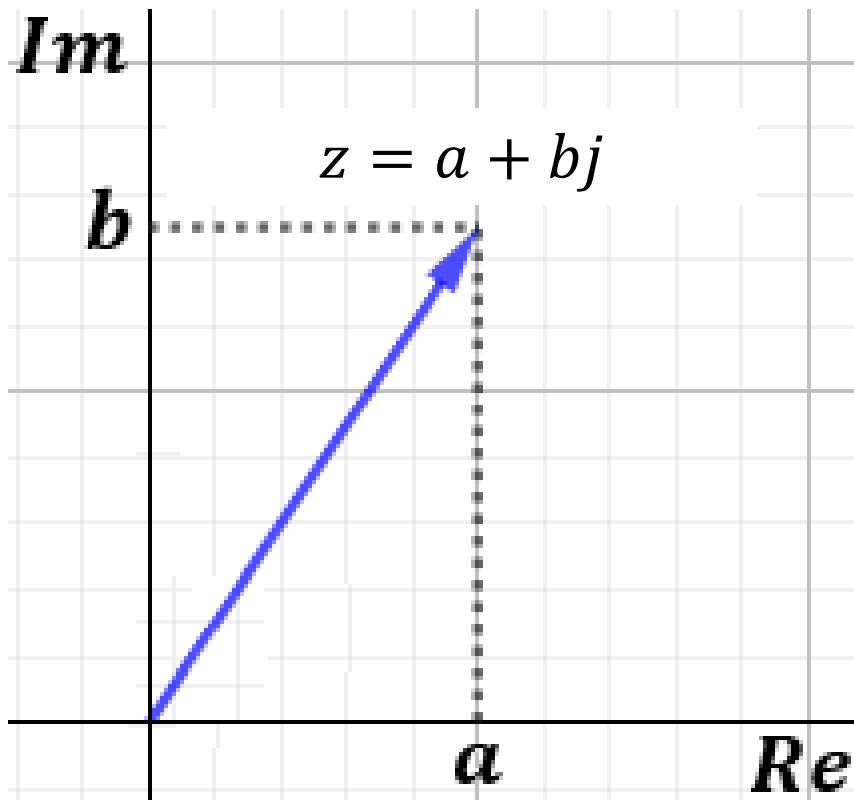
Introducción

Origen:

Los números complejos surgen de la necesidad de resolver ecuaciones reales tales como

$$z^2 + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \pm 3j$$

donde $j = \sqrt{-1}$ por definición



FORMA BINÓMICA: $z = \underbrace{a}_{\substack{\text{Re}(z) \\ \text{parte} \\ \text{real}}} + \underbrace{b}_{\substack{\text{Im}(z) \\ \text{parte} \\ \text{imaginaria}}} j$

Coordenadas
rectangulares

FORMA PAR ORDENADO: $z = (a, b)$

Operaciones en coordenadas rectangulares

La **suma** y la **resta** se realizan componente a componente, esto es:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1j) + (a_2 + b_2j) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)j$$

El **producto** se realizan aplicando distributiva y teniendo en cuenta que $j^2 = -1$

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1j)(a_2 + b_2j) = a_1 a_2 + a_1 b_2 j + b_1 a_2 j + b_1 b_2 j^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)j$$

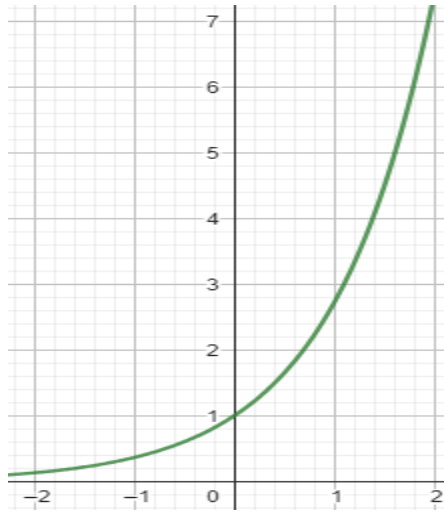
El **cociente** se realiza utilizando la propiedad de diferencias de cuadrados

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + b_1j}{a_2 + b_2j} = \frac{(a_1 + b_1j)(a_2 - b_2j)}{(a_2 + b_2j)(a_2 - b_2j)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (-a_1 b_2 + b_1 a_2)j}{a_2^2 - (b_2j)^2} \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{(-a_1 b_2 + b_1 a_2)}{a_2^2 + b_2^2} j \end{aligned}$$

Fórmula de Euler

Exponencial Real

$$f(t) = e^{\alpha t}$$



Derivada: $\frac{d}{dt} e^{\alpha t} = \alpha e^{\alpha t}$

Integral: $\int e^{\alpha t} dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}$

Extendamos para el caso $\alpha = j$

$$f(t) = e^{jt} = ?$$

Probemos con:

$$e^{jt} = \cos(t) + j \operatorname{sen}(t)$$

Derivada:

$$\frac{d}{dt} e^{jt} = -\operatorname{sen}(t) + j \cos(t) = j(j \operatorname{sen}(t) + \cos(t)) = j e^{jt}$$

Integral:

$$\begin{aligned} \int e^{jt} dt &= \int \cos(t) dt + j \int \operatorname{sen}(t) dt \\ &= \operatorname{sen}(t) - j \cos(t) = \frac{1}{j} (j \operatorname{sen}(t) + \cos(t)) = \frac{e^{jt}}{j} \end{aligned}$$

Fórmula de Euler:

$$e^{jt} = \cos t + j \operatorname{sen} t$$

Coordenadas Polares

Usando coordenadas polares, cualquier número complejo $z = a + jb$ se puede expresar de la forma

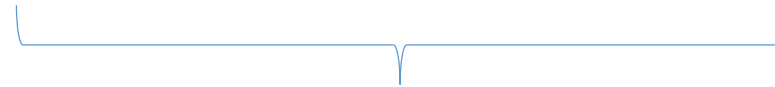
$$z = \rho e^{j\theta} = \rho(\cos \theta + j \sen \theta)$$

FORMA

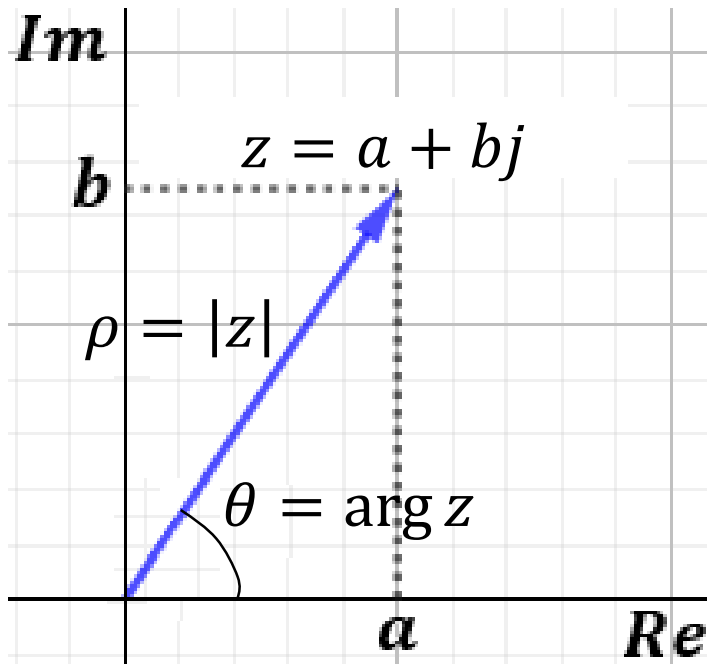
FORMA

EXPONENCIAL

POLAR



Coordenadas
Polares



$$\begin{cases} \rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \arg z = \text{atan2}(b, a) \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} a = \rho \cos \theta \\ b = \rho \sen \theta \end{cases}$$

Operaciones en coordenadas polares

La suma y la resta son complicadas en coordenadas polares, pero el producto y el cociente son más simples

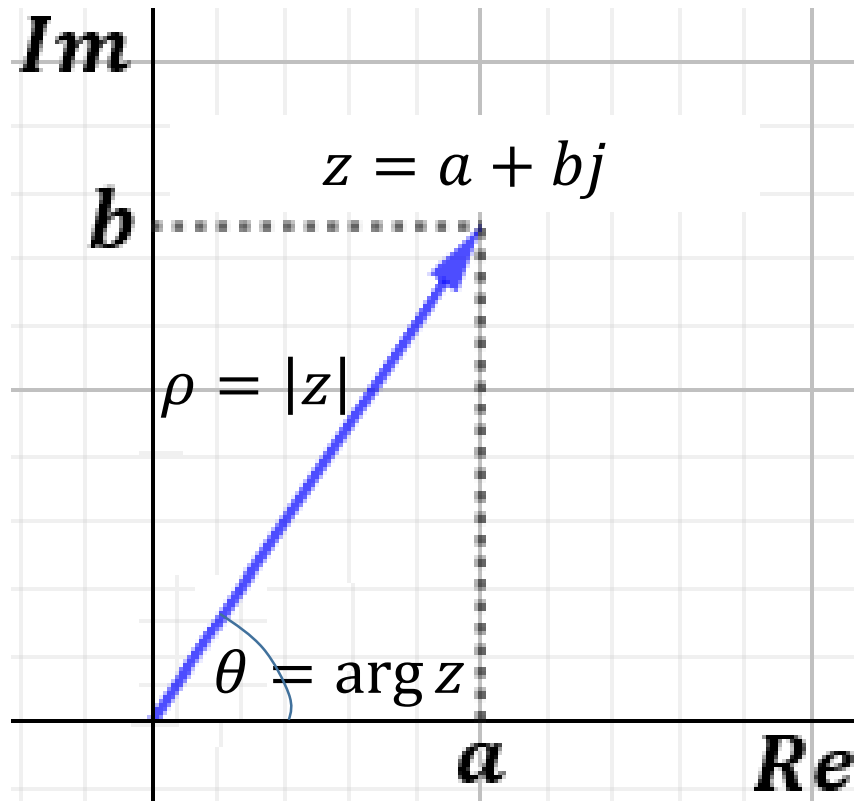
Producto:

$$z_1 z_2 = \rho_1 e^{j\theta_1} \rho_2 e^{j\theta_2} = (\rho_1 \rho_2) e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

Cociente:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{j\theta_1}}{\rho_2 e^{j\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

Igualdad



COORDENADAS RECTANGULARES:

$$a_1 + b_1j = a_2 + b_2j \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

COORDENADAS POLARES:

$$\rho_1 e^{j\theta_1} = \rho_2 e^{j\theta_2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \end{cases}$$

Potencia en coordenadas polares

$$z^n = (\rho e^{j\theta})^n = \rho^n e^{jn\theta}$$

Fórmula de Moivre: $(\cos \theta + j \operatorname{sen} \theta)^n = \cos(n\theta) + j \operatorname{sen}(n\theta)$

Radición en coordenadas polares

$$w = \sqrt[n]{z} \quad \Leftrightarrow \quad z = w^n \quad \Leftrightarrow \quad \rho_z e^{j\theta_z} = (\rho_w e^{j\theta_w})^n \quad \Leftrightarrow \quad \rho_z e^{j\theta_z} = \rho_w^n e^{jn\theta_w}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho_z = \rho_w^n \\ \theta_z + 2k\pi = n\theta_w \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_w = \sqrt[n]{\rho_z} \\ \theta_w = \frac{\theta_z + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

Ejemplo: $z = 1 = 1 + 0j = 1e^{j0}$

$$\sqrt[4]{z} = \begin{cases} \sqrt[4]{1} \exp\left\{j \frac{0 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{4}\right\} \\ \sqrt[4]{1} \exp\left\{j \frac{0 + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{4}\right\} \\ \sqrt[4]{1} \exp\left\{j \frac{0 + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{4}\right\} \\ \sqrt[4]{1} \exp\left\{j \frac{0 + 2 \cdot 3 \cdot \pi}{4}\right\} \end{cases} = \begin{cases} \exp\{0j\} \\ \exp\left\{\frac{\pi}{2}j\right\} \\ \exp\{\pi j\} \\ \exp\left\{\frac{3}{2}\pi j\right\} \end{cases} = \begin{cases} \cos 0 + j \sin 0 \\ \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} \\ \cos \pi + j \sin \pi \\ \cos \frac{3}{2}\pi + j \sin \frac{3}{2}\pi \end{cases} = \begin{cases} 1 \\ j \\ -1 \\ -j \end{cases}$$

Conjugado

Si $z = a + bj = \rho e^{j\theta}$ entonces se define el **conjugado** como

$$\bar{z} = a - bj = \rho e^{-j\theta}$$

Propiedades:

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

$$z + \bar{z} = 2a = 2 \cdot \text{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = 2bj = 2j \cdot \text{Im}(z)$$

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

Propiedad

Exponencial Real

$$f(t) = e^{-\alpha t} \text{ con } \alpha > 0$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} dt = -\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha} \Big|_0^{\infty} = -0 + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

Exponencial compleja: Si $z = a + bj$

$$e^{-zt} = e^{-at-btj} = e^{-at}(\cos(-bt) + j \operatorname{sen}(-bt)) = e^{-at}(\cos(bt) - j \operatorname{sen}(bt))$$

Integral:

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} \cos(bt) dt - j \int_0^{\infty} e^{-at} \operatorname{sen}(bt) dt = \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \right) - j \left(\frac{b}{a^2 + b^2} \right) = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}$$

siempre que $a = \operatorname{Re}(z) > 0$

Función de variable compleja

Definición: Una función de variable compleja es una aplicación $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

Nota: Puede pensarse como $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Ejemplo:

$$w = z^2 \quad \Leftrightarrow \quad u + vj = (x + yj)^2 = x^2 + 2xyj + (yj)^2 = x^2 - y^2 + j2xy \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u = u(x, y) = x^2 - y^2 \\ v = v(x, y) = 2xy \end{cases}$$

$$z = (x, y) \mapsto w = f(z) = (u(x, y), v(x, y))$$

Nota: Las funciones reales $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pueden verse como casos particulares de las funciones complejas

Funciones Analíticas

Definición: Se dice que $w = f(z)$ es **derivable** en $z = a$ si existe el límite

$$f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

Definición: Se dice que $w = f(z)$ es **analítica** en una región abierta $A \subseteq \mathbb{C}$ si es derivable en todos los puntos de A . En caso de que $A = \mathbb{C}$ simplemente diremos que $w = f(z)$ es **analítica**, y la función derivada resulta ser

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Ejemplo: Si $f(z) = z$ es analítica ya que

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z + \Delta z - z}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} 1 = 1 \quad \forall z \in A = \mathbb{C}$$

Ejemplo: Si $f(z) = z^n$ es analítica ya que

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z^n + n z^{n-1} \Delta z + \dots + n z \Delta z^{n-1} + \Delta z^n - z^n}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} n z^{n-1} + \dots + n z \Delta z^{n-2} + \Delta z^{n-1} = n z^{n-1} \quad \forall z \in A = \mathbb{C} \end{aligned}$$

Funciones Analíticas

Ejemplo: Veamos que $f(z) = \bar{z}$ no es derivable en ningún punto $z = x + jy$ de su dominio.

Si $\Delta z = \Delta x + j\Delta y$ entonces

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{z + \Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta x - j\Delta y}{\Delta x + j\Delta y}$$

Para que el límite exista deben coincidir los límites iterados

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x - j\Delta y}{\Delta x + j\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x - j\Delta y}{\Delta x + j\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-j\Delta y}{j\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -1 = -1$$

Resultando entonces que la función no es analítica

Funciones Analíticas

Propiedades: Si f y g son funciones analítica en una región abierta $A \subseteq \mathbb{C}$ entonces $f \pm g$ y $f \cdot g$ también son analíticas en A , mientras que f/g es analítica en $\{a \in A: g(a) \neq 0\}$. Además

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$$

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

Regla de la cadena: Si f es analítica en $A \subseteq \mathbb{C}$ y g es analítica en $f(A) \subseteq \mathbb{C}$ entonces $g \circ f$ es analítica en A con

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

Condición de Cauchy-Riemann

Teorema: Si una función compleja $w = u + jv = f(z) = f(x + jy)$ es analítica entonces las funciones reales $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ son diferenciables y verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Recíprocamente, si u y v tienen derivadas parciales continuas en una región abierta y verifican estas ecuaciones, entonces f es analítica en esta región.

Ejemplo: La función $f(z) = \frac{1}{z}$ es analítica para $z \neq 0$ ya que

$$f(z) = f(x + jy) = \frac{1}{x + jy} = \frac{1}{x + jy} \frac{x - jy}{x - jy} = \frac{x - jy}{x^2 + y^2} = \underbrace{\frac{x}{x^2 + y^2}}_{u(x,y)} + j \underbrace{\frac{-y}{x^2 + y^2}}_{v(x,y)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-1 \cdot (x^2 + y^2) - (-y) \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

=

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{0 \cdot (x^2 + y^2) - (-y) \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{0 \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Condición de Cauchy-Riemann

Teorema: Si una función compleja $w = u + jv = f(z) = f(x + jy)$ es analítica entonces las funciones reales $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ son diferenciables y verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Recíprocamente, si u y v tienen derivadas parciales continuas en una región abierta y verifican estas ecuaciones, entonces f es analítica en esta región.

Ejemplo: La función $f(z) = \bar{z}$ no es analítica pues

$$f(z) = f(x + jy) = \underbrace{x}_{u(x,y)} + j \underbrace{(-y)}_{v(x,y)}$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial u}{\partial x} = 1 & \neq & \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -1 & & -\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{array}$$

Generalización de funciones especiales

Definición: Se conoce como **función exponencial compleja** a la generalización de la función exponencial real dada por

$$w = e^z = e^{x+jy} = e^x e^{jy} = e^x (\cos y + j \sin y) = \underbrace{e^x \cos y}_{u(x,y)} + j \underbrace{e^x \sin y}_{v(x,y)}$$

Se prueba que es una generalización haciendo $y = 0$, esto es, $z \in \mathbb{R}$.

La exponencial compleja es una función analítica ya que $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son diferenciables y verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Generalización de funciones especiales

Calculemos la derivada de $f(z) = e^z$ en un punto genérico $a = b + jc \in \mathbb{C}$ usando límites iterados (El resultado del límite es independiente de la dirección elegida debido a que ya comprobamos que la función es analítica)

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{e^z - e^a}{z - a} = \lim_{x \rightarrow b} \lim_{y \rightarrow c} \frac{e^{x+jy} - e^{b+jc}}{x + jy - b - jc} = \lim_{x \rightarrow b} \lim_{y \rightarrow c} \frac{e^x \cos y + je^x \operatorname{sen} y - e^b \cos c - je^b \operatorname{sen} c}{x - b + j(y - c)} \\ &= \lim_{x \rightarrow b} \lim_{y \rightarrow c} \frac{e^x \cos y - e^b \cos c + j(e^x \operatorname{sen} y - e^b \operatorname{sen} c)}{x - b + j(y - c)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{e^x \cos c - e^b \cos c + j(e^x \operatorname{sen} c - e^b \operatorname{sen} c)}{x - b} \\ &= \lim_{x \rightarrow b} \frac{(e^x - e^b) \cos c + j(e^x - e^b) \operatorname{sen} c}{x - b} = \lim_{x \rightarrow b} \underbrace{\frac{e^x - e^b}{x - b}}_{e^b} \underbrace{(\cos c + j \operatorname{sen} c)}_{e^{jc}} = e^a \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z$$

Aplicando la regla de la cadena

$$\frac{d}{dz} e^{kz} = k e^{kz}$$