

Preguntas de teoría: Matemática Aplicada (IPE-MEC)

CÁLCULO VARIACIONAL

1. Explique que es un funcional y que es un problema variacional. Interprete la solución del problema variacional.
2. Enuncie el Problema de la Trayectoria Mínima (o Geodésica) entre dos puntos del plano, halle el funcional que lo caracteriza y resuelva el problema variacional asociado.
3. Enuncie el Problema de la Braquistócrona, halle el funcional que lo caracteriza y resuelva el problema variacional asociado.
4. Enuncie el Problema de la superficie de revolución de área mínima, halle el funcional que lo caracteriza y resuelva el problema variacional asociado.
5. ¿Qué entiende por Ecuación de Euler? Deduzca la Ecuación de Euler general para problemas de primer orden, con una incógnita y con condiciones de contorno fijas.
6. ¿Qué rol cumplen las Ecuaciones de Euler en el Cálculo Variacional? Ejemplifique.
7. Obtenga la expresión particular de la Ecuación de Euler cuando el funcional no depende explícitamente de y . Ejemplificar con la resolución de un problema variacional en este contexto.
8. Obtenga la expresión particular de la Ecuación de Euler cuando el funcional no depende explícitamente de x . Ejemplificar con la resolución de un problema variacional en este contexto.
9. Explique el Principio de Fermat. Obtenga el funcional asociado al tiempo de propagación de la luz en un medio cuya velocidad puede depender de la posición. Analice el caso de un medio homogéneo y ejemplifique la resolución para un medio no homogéneo.
10. Enuncie el Problema de la aceleración de una masa con consumo mínimo, halle el funcional que lo caracteriza y demuestre que la velocidad de la masa viene dada por:

$$v(t) = \frac{v_f}{\sinh\left(\frac{\beta}{m} T\right)} \sinh\left(\frac{\beta}{m} t\right)$$

11. Exprese la Ecuación de Euler para Funcionales que dependen de derivadas de mayor orden. Enumere las diferencias que tiene su deducción en relación al caso particular de primer orden. Ejemplifique su uso.
12. Exprese las Ecuaciones de Euler para Funcionales que dependen de más de una función. Explique con sus palabras la relación que existe entre la deducción de estas ecuaciones y la deducción de la ecuación de Euler para el caso de una incógnita. Ejemplifique su uso.
13. Enuncie el Principio de Hamilton de la acción estacionaria. Aplíquelo para obtener la EDO que caracteriza el movimiento en un sistema masa-resorte sin fricción.
14. Enuncie el Principio de Hamilton de la acción estacionaria. Aplíquelo para obtener la EDO que caracteriza el movimiento en un sistema de péndulo simple.
15. Enuncie el Principio de Hamilton de la acción estacionaria. Aplique las Ecuaciones de Euler para modelar la evolución de un sistema de péndulo articulado.
16. Explique el Método de Multiplicadores de Lagrange para un problema variacional condicionado. Ejemplifique incluyendo la resolución.
17. Explique el Método de Multiplicadores de Lagrange para un problema isoperimétrico. Ejemplifique incluyendo la resolución.

18. Enuncie y resuelva el problema del cable suspendido como problema isoperimétrico. Obtenga el funcional asociado, formule la restricción correspondiente a la inextensibilidad del cable y aplique el Método de Multiplicadores de Lagrange para obtener la catenaria.

NÚMEROS COMPLEJOS Y FUNCIONES ANALÍTICAS

19. Defina la unidad imaginaria. ¿Cuáles son las cuatro formas vistas para representar un número complejo? Ejemplifique.
20. Considere dos números complejos a su elección con parte real e imaginaria no nula, y calcule, su suma, resta, producto y división. Explique el rol del conjugado en el cálculo del cociente.
21. Defina módulo, argumento y conjugado de un número complejo. Demuestre que $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$, y $z - \bar{z} = 2j \operatorname{Im}(z)$
22. Considere un número complejo a su elección y elévelo al cuadrado. ¿Qué relación hay entre los módulos y fases de estos números?
23. Considere un número complejo a su elección con parte real e imaginaria no nula, y calcule sus raíces cuartas. Grafique estas raíces. ¿Qué observa?
24. Muestre por qué toda función compleja $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ puede ser vista como una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. Ejemplifique con la función $f(z) = z^2$.
25. Defina función analítica. Ejemplifique el cálculo por definición de la derivación compleja.
26. Defina función analítica. Dé un ejemplo de función no analítica. Demuestre que no lo es usando la definición.
27. Enuncie las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Explique su relación con la analiticidad. Ejemplifique con una función analítica y otra que no lo sea.
28. ¿Cómo se define la función exponencial compleja? Enuncie y demuestre propiedades relacionadas con el cálculo de derivadas e integrales de funciones exponenciales complejas.

TRANSFORMADA DE LAPLACE

29. Defina la Transformada de Laplace de una función $f(t)$ definida para $t \geq 0$. Explique por qué, al considerar $s \in \mathbb{C}$, la transformada no queda definida necesariamente en todo el plano complejo sino en una región de convergencia. Calcule por definición la transformada de una función simple a elección, indicando su región de convergencia.
30. ¿Qué significa que una función sea continua por partes o seccionalmente continua en un intervalo? Ejemplifique con una función continua, una función continua por partes y una función que no sea continua por partes.
31. ¿Qué entiende por Función de Orden Exponencial? Ejemplifique indicando M y α .
32. Enuncie y demuestre una condición suficiente para la existencia de la Transformada de Laplace. En la demostración, explique por qué la condición natural para $s \in \mathbb{C}$ se expresa mediante $\operatorname{Re}(s) > \alpha$.
33. ¿La Condición de Suficiencia para la existencia de la Transformada de Laplace es también Condición Necesaria? Justifique.
34. Enuncie la Propiedad de Linealidad de la Transformada de Laplace. Ejemplifique. Explique qué ocurre con la región de convergencia al combinar linealmente transformadas.

35. Enuncie y ejemplifique la Propiedad que relaciona $\mathcal{L}(f(t))$ con $\mathcal{L}(t^n f(t))$. Demuestre para $n = 1$.
36. Enuncie, demuestre y ejemplifique la Propiedad de Traslación en s de la Transformada de Laplace. Explique cómo se modifica la región de convergencia.
37. Enuncie, demuestre y ejemplifique la Propiedad de la Transformada de la derivada de una función.
38. Enuncie y demuestre la Propiedad que relaciona $\mathcal{L}(f(t))$ con $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)dx\right)$.
39. Defina la Función Escalón Unitaria o Heaviside. Utilice esta definición para definir la función Pulso y un Tren de pulsos.
40. Defina la Función Escalón Unitaria o Heaviside. Utilice esta definición para definir una función por partes de manera generalizada.
41. Enuncie, demuestre y ejemplifique la Propiedad de Traslación en t de la Transformada de Laplace.
42. Defina la Función Delta de Dirac y calcule por definición su Transformada de Laplace.
43. Enuncie el Teorema de Valor Inicial. Dé un ejemplo donde el teorema se pueda aplicar y otro donde falle alguna hipótesis.
44. Enuncie el Teorema de Valor Final. Dé un ejemplo donde el teorema se pueda aplicar y otro donde no se pueda aplicar.
45. Enuncie, demuestre y ejemplifique el Teorema de Convolución.
46. Dado un sistema físico modelado con una EDO Lineal de segundo orden, explique cómo es posible obtener la evolución temporal del sistema aplicando la Transformada de Laplace. Ejemplifique.
47. ¿Qué entiende por $h(t)$? Explique su método de cálculo.
48. ¿Cuándo un sistema es Lineal, Invariante en el tiempo y Causal? Ejemplifique.
49. ¿Qué entiende por $H(s)$? Explique cómo puede obtenerse.

SERIES DE FOURIER

50. Defina función periódica, período y período fundamental. Relacione período, frecuencia y frecuencia angular. Ejemplifique.
51. Defina función par y función impar. Enuncie las propiedades de simetría e integración asociadas. Muestre cómo puede descomponerse una función cualquiera como suma de una función par y una función impar.
52. Defina la Serie de Fourier asociada a una función periódica de período T . Escriba las expresiones de los coeficientes de Fourier e interprete el término constante y los términos armónicos de la serie.
53. Enuncie un resultado de convergencia para Series de Fourier. Explique a qué valor converge la serie en un punto de continuidad y en un punto de discontinuidad. ¿Qué se entiende por Fenómeno de Gibbs?
54. A partir de las expresiones generales de los coeficientes de Fourier, deduzca las simplificaciones que se obtienen cuando la función es par o impar. Indique qué términos aparecen en cada caso.
55. A partir de la forma trigonométrica de la Serie de Fourier, muestre que puede expresarse equivalentemente como una suma de funciones seno con amplitud y fase. Deduzca la relación entre los coeficientes a_n , b_n y la amplitud A_n y fase θ_n de cada armónico.

ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES

56. Defina Ecuación Diferencial en Derivadas Parciales. Explique qué se entiende por orden de una EDDP y cuándo una EDDP es lineal. Ejemplifique con una EDDP lineal y una no lineal.
57. Escriba la forma general de una EDDP lineal de segundo orden en dos variables y explique su clasificación en elíptica, parabólica e hiperbólica. Ejemplifique cada tipo mediante alguno de los modelos estudiados en el curso.
58. Defina el modelo matemático de la Cuerda Vibrante. Explique cada una de sus condiciones complementarias. Interprete físicamente.
59. Explique con sus palabras cómo resolver la ecuación de la Cuerda Vibrante aplicando el Método de D'Alembert. Ejemplifique. Enuncie las ventajas y desventajas respecto de resolverla utilizando separación de variables.
60. Explique con un ejemplo la resolución del problema de la Cuerda Vibrante aplicando el Método de Separación de Variables. Incluya un análisis detallado del signo de la constante de separación de variables ¿Qué diferencias existen entre los dos métodos de resolución vistos para el problema de la cuerda vibrante?
61. Deduzca la ecuación de conducción del calor. Parta de la ecuación de balance de calor, utilice la Ley de Fourier y el Teorema de la Divergencia, e interprete las magnitudes físicas involucradas. Obtenga como caso particular la ecuación sin fuentes e interprete la difusividad térmica.
62. Defina el modelo matemático de la Conducción de Calor sobre una barra de longitud ℓ . Explique cada una de sus condiciones complementarias. Interprete físicamente.
63. Explique con un ejemplo la resolución del problema de la distribución de temperatura de una barra de longitud ℓ aplicando el Método de Separación de Variables. Incluya un análisis detallado del signo de la constante de separación de variables
64. ¿Qué procedimiento debe emplearse para resolver el caso no homogéneo en un problema de distribución de temperatura de una barra de longitud ℓ ? Ejemplifique sólo esta etapa.
65. Dada la Ecuación de la Conducción de Calor ¿Qué expresión adquiere la Ecuación si el proceso es estacionario y no existen fuentes? ¿Por qué en estos problemas no aparecen condiciones iniciales? Desarrolle.
66. Defina el modelo matemático de la distribución de temperatura en estado estacionario sobre una lámina rectangular. Interprete físicamente.
67. ¿Qué entiende por Principio de Valor Máximo? ¿Cómo se aplica en la resolución del problema de la distribución de temperatura en estado estacionario?
68. Explique con un ejemplo la resolución del problema de la distribución de temperatura en estado estacionario sobre una lámina rectangular aplicando el Método de Separación de Variables. Incluya un análisis detallado del signo de la constante de separación de variables.